Numerik: Übungsblatt 3

1. (a) Es ist zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}}\end{aligned}$$

wobei λ_{max} der größte Eigenwert der Matrix A^TA ist. $\|A\|$ kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{(A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x})} \\ &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}}.\ (*)\end{aligned}$$

Die im Ausdruck (*) auftretende Matrix A^TA muß aufgrund des Hinweises *symmetrisch* sein. Daher gilt, daß ihre Eigenwerte λ_i reell sind. Die n zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{y}_i$ mit $1 \leq i \leq n$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Damit ist es nun möglich, einen beliebigen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination der Eigenvektoren $\mathbf{y}_i$ darzustellen. Es ist also

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i$$

und $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}$ kann damit umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{y}_i\right)^T A^TA \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{y}_j\right) \\ (A^TA\mathbf{y}_i = \lambda_i\mathbf{y}_i) &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{y}_i\right)^T \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j\mathbf{y}_j\right) \\ (\mathbf{y}_i \text{ bilden Orthonormalbasis des } \mathbb{R}^n\text{, daher } \mathbf{y}_i^T\mathbf{y}_j = \delta_{ij}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2\lambda_i.\end{aligned}$$

Da weiter die Bedingung $\|\mathbf{x}\| = 1$ gültig sein muß, gilt für die Matrixnorm

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2\lambda_i} \\ &\leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{\lambda_{max}\sum_{i=1}^{n} c_i^2} \\ &= \sqrt{\lambda_{max}}.\end{aligned}$$

Echte Gleichheit wird erreicht, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1$ und $c_1 = 1$, sowie $c_2 = \ldots = c_n = 0$. Dann nimmt $\sqrt{\lambda_{max}}$ den maximalen Wert an und es ist

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \\ &= \sqrt{\lambda_{max}},\end{aligned}$$

wobei λ_{max} der größte Eigenwert von A^TA ist. ∎

(b) *Orthogonale Matrizen* sind die reellen unitären Matrizen und haben daher unter anderem die Eigenschaft $A^T = A^{-1}$, aus der folgt, daß $AA^T = A^TA = E$. Die *Konditionszahl* $k(A)$ einer Matrix A berechnet man über die Formel $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Die *Matrixnorm* $\|A\|$ einer Matrix A ist gleich der Quadratwurzel des größten Eigenwerts λ_{max} der Matrix A^TA, es gilt also $\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}}$. Aus den Eigenschaften der *orthogonalen Matrizen* folgt nun, daß die Matrix $A^TA = E$. Da der einzige Eigenwert des Operators E (Identität) $\lambda = \lambda_{max} = 1$ ist, gilt für alle *orthogonalen Matrizen* A, daß $\|A\| = \|A^{-1}\| = \sqrt{\lambda_{max}} = \sqrt{1} = 1$. Somit ist die *Konditionszahl* einer *orthogonalen Matrix* immer $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = 1$. ■

2. Sei der Vektor $\mathbf{b}$ der Zeilensummen der $n \times n$ Vandermonde-Matrix V definiert als

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für das i-te Element von $\mathbf{b}$ der Wert

$$b_i = \sum_{j=0}^{n-1} (i+1)^j = \frac{(i+1)^n - 1}{i}.$$

Für das Gleichungssystem $V\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ergibt sich so die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. (Siehe Programm `vandermonde.m` im Anhang.) Mit Hilfe der eingebauten Octave-Funktion `cond()`[1] ergibt sich für $n = 10$ die Konditionszahl 2.6871×10^{13} und für $n = 20$ die Konditionszahl 3.0972×10^{26}.

[1] `cond()` berechnet die Konditionszahl mit $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.