Übungsgruppe Roland Eikemper, Mittwoch 13.15 Uhr - 14.00 Uhr, Raum H41/S8

Nils Gehlenborg (*neil@mangojelly.org*)

Numerik: Übungsblatt 10

1. (a) Das implizite Eulerverfahren für den angegebenen harmonischen Oszillator kann in dieser Form geschrieben werden, denn es gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= M^{-1}x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= (E - \Delta t A)^{-1}x_n \\ \Leftrightarrow (E - \Delta t A)x_{n+1} &= x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} - \Delta t A x_{n+1} &= x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei (1) die Form des impliziten Eulerverfahrens für vektorwertige Funktionen ist.

(b) M ist für beliebige Zeitschritte Δt invertierbar, denn die Determinante von M,

$$|M| = |E - \Delta t A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \Delta t \\ -\Delta t & 0 \end{pmatrix} \right| = 1 + (\Delta t)^2$$

ist immer ungleich 0, wegen $(\Delta t)^2 > 0 \; \forall \; \Delta t$, woraus Invertierbarkeit folgt.

2. (Siehe Programm `implicit_euler.m` im Anhang.) Das Octave-Programm `implicit_euler.m` verwendet die Formel

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

zur Lösung des angegebenen harmonischen Oszillators. Dabei ist

$$M^{-1} = (E - \Delta t A)^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man nach Vektor-Matrix-Multiplikation zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= m_1 x_n + m_2 y_n \\ y_{n+1} &= m_3 x_n + m_4 y_n \end{aligned}$$

zur Berechnung in Octave.

3. (Siehe Programm `symplectic_euler.m` im Anhang.) Das Octave-Programm `symplectic_euler.m` plottet die Lösung des harmonischen Oszillators mit Hilfe der Formel

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Bx_n, \text{ wobei} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

die zur Berechnung in Octave umgeformt wird zu

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t y_n$$
$$y_{n+1} = m_{21}^{-1} x_n + m_{22}^{-1} y_n.$$

Die x-Komponente wurde also explizit berechnet, die y-Komponente implizit. Abbildung 1 zeigt sehr deutlich die Unterschiede zwischen den drei verschiedenen Eulerverfahren. Sowohl die Trajektorien des impliziten als auch die des expliziten weichen sehr stark von der elliptischen Form der Trajektorien ab, die nach einer Fixpunkt-Untersuchung des harmonischen Oszillators zu erwarten wären. Allein das symplektische Eulerverfahren ist sehr nahe an der richtigen Lösung, allerdings kann man bei einem größeren Δt auch hier größere Abweichungen sehen. Für die Genauigkeit der drei Verfahren gilt also $\text{Euler}_{\text{explizit}} < \text{Euler}_{\text{implizit}} < \text{Euler}_{\text{symplektisch}}$.

Abbildung 1: `line 1`: explizit, `line 2`: implizit, `line 3`: symplektisch ($\Delta t = 0.01$, 10000 Schritte)