Strömungsmechanik

Übungsblatt 5

23.05.2001

1. Zeige, dass für eine homogene, inkompressible Flüssigkeit auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jedes Integral der Form
$$I = \int_\Omega f(\omega(\boldsymbol{x}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
eine Erhaltungsgröße ist, wobei $f\colon \Omega \to \Omega$ eine beliebige (messbare) Funktion ist.

   Bemerkung: Insbesondere ist also die sogenannte *Enstrophie*
$$E = \int_\Omega |\omega(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$
eine Erhaltungsgröße.

2. Beweise die Eindeutigkeit der in der Vorlesung konstruierten Lösung der Eulergleichungen für homogene, inkompressible Flüssigkeiten auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

   Dabei kann man wie folgt vorgehen: Nehme an, es gäbe eine weitere Lösung ϕ der Lagrange'schen Bewegungsgleichung, also
$$\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t) = \int_\Omega K(\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{y},t))\,\omega_0(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$
$$\phi(\,\cdot\,,0) = \mathrm{Id}\,.$$
   Schätze dann die Differenz zur Lösung $\eta(\boldsymbol{x},t)$ genau wie im Schritt 2 des Fixpunktargumentes aus der Vorlesung ab (siehe auch Marchioro & Pulvirenti, Abschnitt 2.3).