Strömungsmechanik

Übungsblatt 2

02.05.2001

1. Die Advektion von Feldern lässt sich in Lagrange'schen Koordinaten sehr einfach ausdrücken.

   Leite aus folgenden Ausdrücken die (schon bekannten) Transportgleichungen in Euler'schen Koordinaten ab. Hinreichende Differenzierbarkeit sei gegeben.

   (a) *Advektion eines skalaren Feldes f:*

   $$f(\eta(\boldsymbol{x},t),t) = f(\boldsymbol{x},0)$$

   (b) *Massenerhaltung:*

   $$\rho(\eta(\boldsymbol{x},t),t)\, J(\boldsymbol{x},t) = \rho(\boldsymbol{x},0),$$

   wobei $J = \det \boldsymbol{\nabla}\eta$ die Jacobideterminante ist.

   (c) *Advektion eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$:*

   $$\boldsymbol{v}(\eta(\boldsymbol{x},t),t) = \boldsymbol{\nabla}\eta(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)$$

   (Siehe auch Aufgabe 2 auf dem 1. Übungsblatt.)

2. Leite die Wirbelstärkenformulierung der Eulergleichungen für homogene inkompressible Flüssigkeiten aus der Impulsgleichung ab:

   $$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}. \tag{*}$$

   (Wer hat die kürzeste Rechnung?)

3. Zeige, dass eine radiale Wirbelstärkenverteilung in zwei Raumdimensionen eine stationäre Lösung von (*) ist.