Strömungsmechanik

Übungsblatt 1

25.04.2001

1. Sei $f = f(\boldsymbol{x}, t)$ ein hinreichend glattes skalares Feld. Wie in der Vorlesung ist $W_t = \eta(W)$ ein zeitabhängiges Testvolumen, $\eta = \eta(\boldsymbol{x}, t)$ der von einem Vektorfeld $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ erzeugte Fluss (also $\dot\eta = \boldsymbol{u} \circ \eta$), und $D_t = \partial_t + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ die materielle Ableitung.

   Leite folgende Transportsätze aus dem Satz von Liouville ab.

   (a) $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{W_t} \rho f \,\mathrm{d}V = \int_{W_t} \rho\, D_t f \,\mathrm{d}V$

   (b) $\displaystyle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{W_t} f \,\mathrm{d}V = \int_{W_t} \partial_t f \,\mathrm{d}V + \int_{\partial W_t} f\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}A$

   Welche Bedeutung haben die beiden Integrale auf der rechten Seite von (b)?

2. Ein Vektorfeld $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ kann man durch

   $$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\partial \phi_\varepsilon(\boldsymbol{x})}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

   definieren, wobei $\phi_\varepsilon \colon \Omega \to \Omega$ eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen mit $\phi_0 = \mathrm{Id}$ ist.

   Dieses Vektorfeld soll durch den Fluss $\eta = \eta(\boldsymbol{x}, t)$ auf folgende Weise transportiert werden: Man nehme das *Bild der Kurve* ϕ_ε unter dem Fluss, leite dann erst nach ε ab und setze schließlich $\varepsilon = 0$.

   Zeige, dass man so ein zeitabhängiges Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ erhält, das die Transportgleichung

   $$\begin{gathered} \partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{u} = 0 \\ \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{w} \end{gathered}$$

   erfüllt.

   (Für Experten: warum hängt diese Konstruktion nur von $\boldsymbol{w}$, nicht aber von der Wahl der Kurve ϕ_ε ab?)