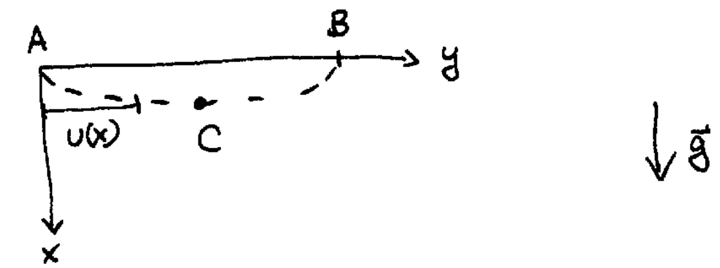
Optimale Bahn für rollende Kugel

Problem: Eine Kugel (mit Radius 0, also Trägheitsmomentenfrei) rollt von Punkt $A = (0,0)$ nach $B = (0,1)$ mit vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit $|V_0|$ (Richtung beliebig). Welche Kurve optimiert die Laufzeit?



Dies ist eine Variation des klassischen Brachistochronen-problems, und kann genauso gelöst werden. Die Momentangeschwindigkeit ergibt sich aus der Energiebilanz:

$$E(0) = E(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V^2 - m g x$$

Zur Vereinfachung nehme $2g = 1$, $|V_0| = 1$. Damit ist

$$V = \sqrt{1+x}$$

und das Laufzeitintegral wird

$$J(u) = \int_\alpha^\beta \frac{ds}{V} = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{1+x}}\, dx$$

Dieses Variationsproblem hat offensichtlich als 1. Integral

$$\frac{U'}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+U'^2}} = c$$

$$\Rightarrow \quad U' = \sqrt{\frac{c^2(1+x)}{1-c^2(1+x)}} \qquad (*)$$

Diese Gleichung ist zunächst einmal nur auf einem Bahnabschnitt gültig, auf dem y als Funktion von x darstellbar ist. Wir werden jetzt aber wie im Skript parametrisieren, und dabei feststellen, dass die Parametrisierung für die ganze Bahn (also den absteigenden und den aufsteigenden Ast) Sinn macht. Da die Parametrisierung auf jedem dieser Äste (*) löst, und im Tiefpunkt C^∞ ist, kann man sich im weiteren auf die Betrachtung der Parametrisierung beschäftigen.

Setze $\quad c^2(1+x) = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi) \qquad (**)$

$$\Rightarrow \quad y'(\varphi) = \frac{du}{dx}\,\frac{dx}{d\varphi} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi}}\;\frac{dx}{d\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \quad \frac{1}{2c^2} \quad \sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2c^2} \sqrt{\frac{(1-\cos\varphi)^2}{1-\cos^2\varphi}} \quad \sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2c^2} \left(1-\cos\varphi\right)$$

Zunächst gilt diese Rechnung nur für $\varphi \in (0, \pi)$, man kann aber am Tiefpunkt C der Bahn C^∞ ergänzen!

Durch Integration in φ:

$$y(\varphi) = \frac{1}{2c^2} \left(\varphi - \sin\varphi\right) + \gamma$$

und wegen (**):

$$x(\varphi) = \frac{1}{2c^2} \left(1-\cos\varphi\right) - 1$$

Randbedingungen: Am Anfangspunkt A:

$$x(\varphi_0) = 0 \qquad y(\varphi_0) = 0$$

Am Zielpunkt B:

$$x(\varphi_1) = 0 \qquad y(\varphi_1) = 1$$

Wir haben also 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten

$\varphi_0, \varphi_1, c, \gamma$

Also: $\frac{1}{2c^2}(1-\cos\varphi_0)=1$

$$\frac{1}{2c^2}(1-\cos\varphi_1)=1$$

Da $\varphi_0=\varphi_1$ keinen Sinn macht, und $\varphi_0,\varphi_1\in(0,2\pi)$, muss schon gelten, dass

$$\varphi_1 = 2\pi-\varphi_0 \qquad \text{mit } \varphi_0\in(0,\pi).$$

Da weiterhin $1-\cos\varphi_0 = 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$, folgt

$$\varphi_0 = 2\arcsin c \qquad (***)$$

Mit $y(\varphi_1)=y(\varphi_0)$, d.h. γ spielt keine Rolle, folgt

$$\frac{1}{2c^2}(\varphi_0-\sin\varphi_0)+1 = \frac{1}{2c^2}(2\pi-\varphi_0+\sin\varphi_0)$$

$$\Rightarrow \quad 2\varphi_0-2\pi-2\sin\varphi_0+2c^2=0$$

Mit $(***)$:

$$\underbrace{\varphi_0-\sin\varphi_0+\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}_{=:f}=\pi$$

Dies ist eine Transzendente Gleichung

$\rightarrow$ weiter mit Mathematica

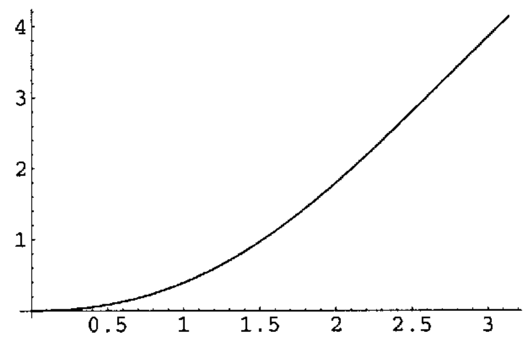
5


```
f = ϕ - Sin[ϕ] + Sin[ϕ / 2] ^ 2
```

$\phi + \mathrm{Sin}\left[\frac{\phi}{2}\right]^2 - \mathrm{Sin}[\phi]$

(Hier steht ϕ für φ_0)

```
Plot[f, {ϕ, 0, Pi}]
```



- Graphics -

Man sieht, dass $f = \pi$ genau eine Lösung hat... (in $[0, \pi]$)

```
D[f, ϕ] // Simplify
```

$\frac{1}{2}(2 - 2\,\mathrm{Cos}[\phi] + \mathrm{Sin}[\phi])$

... und dies ist der Beweis: $f'(\phi)$ ist offensichtlich ≥ 0.

```
sol = FindRoot[f == Pi, {ϕ, Pi / 2}]
```

{ϕ → 2.66078}

```
c = Sin[ϕ / 2] /. sol
```

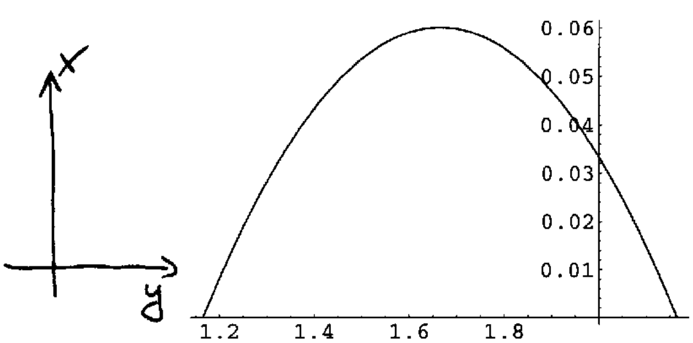
0.971241

```
f0 = ϕ /. sol
```

2.66078

Numerische Approximation für φ_0, und das c dazu.

```
ParametricPlot[{1 / (2 c ^ 2) (x - Sin[x]), 1 / (2 c ^ 2) (1 - Cos[x]) - 1}, {x, f0, 2 Pi - f0}]
```



- Graphics -

Hier plotten wir die Lösung (x-Achse muss invertiert werden)

6


```
int = 1 / Sqrt[1 / (2 c^2) (1 - Cos[x])]
  Sqrt[D[1 / (2 c^2) (1 - Cos[x]) - 1, x] ^2 + D[1 / (2 c^2) (x - Sin[x]), x] ^2]
```

```
NIntegrate[int, {x, f0, 2 Pi - f0}]
```

$$\frac{1.37354\sqrt{0.280951\,(1-\mathrm{Cos}[x])^2+0.280951\,\mathrm{Sin}[x]^2}}{\sqrt{1-\mathrm{Cos}[x]}}$$

T = 0.990096

... und schließlich die numerische Evaluation des Laufzeitintegrals.

Es geht also wirklich schneller als die Bewegung in der Ebene, für die T = 1.