8

(4) $L(t,q,v) = \frac{1}{2} t^2 (v^2 - \frac{1}{3} q^6)$

a) $h_s: (t,q) \mapsto ((1+s)t, (1+s)^{-\frac{1}{2}} q)$

es ist $\frac{dQ_s}{dt} = (1+s)^{-\frac{1}{2}} \dot q$ ✓

$\frac{dT_s}{dt} = 1+s$ ✓

$\frac{dQ_s}{dT_s} = \frac{dQ_s}{dt} \cdot \frac{dt}{dT_s} = \frac{\dot q}{(1+s)^{3/2}}$ ✓

damit $W_s = \int_{T_s^1}^{T_s^2} \frac{1}{2} T_s^2 \left(\left(\frac{dQ_s}{dT_s}\right)^2 - \frac{1}{3} Q_s^6 \right) dT_s$

$= \int_{t^1}^{t^2} \frac{1}{2} t^2 (1+s)^2 \cdot \left(\frac{\dot q^2}{(1+s)^3} - \frac{1}{3} (1+s)^{-3} q^6 \right) (1+s)\, dt$

$= \int_{t^1}^{t^2} \frac{1}{2} t^2 (1+s)^3 \cdot \left(\frac{\dot q^2}{(1+s)^3} - \frac{1}{3} \frac{q^6}{(1+s)^3} \right) dt$

$= \int_{t^1}^{t^2} \frac{1}{2} t^2 (\dot q^2 - \frac{1}{3} q^6)\, dt$

$= \int_{t^1}^{t^2} \frac{1}{2} t^2 (v^2 - \frac{1}{3} q^6)\, dt$

$= W_{s=0}$ ✓

b) es ist $\eta(q) = \frac{\partial}{\partial s} Q_s(t,q) \Big|_{s=0}$

$= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{q}{\sqrt{1+s}} \right) \Big|_{s=0}$

$= -\frac{1}{2} \frac{q}{(1+s)^{3/2}} \Big|_{s=0}$

$= -\frac{1}{2} q$ ✓

$\xi(q) = \frac{\partial}{\partial s} T_s(t,q) \Big|_{s=0}$

$= \frac{\partial}{\partial s} ((1+s)\cdot t) \Big|_{s=0}$

$= t$ ✓

$L_v = t^2 v$ ✓

damit $F(t,q,v) = \text{konst} = L_v \eta - \xi (L_v v - L)$

$= -\frac{1}{2} t^2 q v - t \left(t^2 v^2 - \frac{1}{2} t^2 (v^2 - \frac{1}{3} q^6) \right)$

$= -\frac{1}{2} t^2 q v - t^3 v^2 + \frac{1}{2} t^3 v^2 - \frac{1}{6} t^3 q^6$

$= -\frac{1}{2} t^3 v^2 - \frac{1}{2} t^2 q v - \frac{1}{6} t^3 q^6$

$\Rightarrow \frac{1}{2} t^3 v^2 + \frac{1}{2} t^2 q v + \frac{1}{6} t^3 q^6 = \text{konst} = C$ ✓

(2) bekannt $F(t,q,v) = L_v \eta - \xi (L_v v - L) = $ konst ist erstes Integral der Euler-Gleichung für L,

wenn F_{vv} elliptisch ist, ist eine Erhaltungsgröße gegeben durch $G = F(t,q,L_v)$

$$\overset{p=L_v}{\Rightarrow} \quad G = \langle p, \eta \rangle - \xi (\langle p, v \rangle - L)$$

$$= \langle p, \eta \rangle - \xi H \quad \checkmark$$

4