Lösungen zu Blatt 5

1. Sei u_s eine Einparameterfamilie von Lösungen der Eulergleichung, die C^1 von s abhängt, d.h.

$$F_y(x, u_s, u_s') - \frac{d}{dx}\left(F_z(x, u_s, u_s')\right) = 0$$

für jedes s. Ableitung nach s ergibt:

$$F_{yy}(x, u_s, u_s')\,\frac{\partial u_s}{\partial s} + F_{yz}(x, u_s, u_s')\,\frac{\partial u_s'}{\partial s}$$
$$= \frac{d}{dx}\left(F_{zy}(x, u_s, u_s')\,\frac{\partial u_s}{\partial s} + F_{zz}(x, u_s, u_s')\,\frac{\partial u_s'}{\partial s}\right)$$

Setze jetzt $s=0$ und definiere

$$\varphi := \frac{\partial u}{\partial s}\Big|_{s=0} \qquad \Rightarrow \quad \varphi' = \frac{\partial u_s'}{\partial s}\Big|_{s=0}$$

$$P := F_{zz}(x, u_s, u_s')\Big|_{s=0}$$
$$Q := F_{zy}(x, u_s, u_s')\Big|_{s=0}$$
$$R := F_{yy}(x, u_s, u_s')\Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \quad R\varphi + Q^T\varphi' = \left(Q\varphi + P\varphi'\right)'$$

Dies sind die Jacobi-Gleichungen. Diese Prozedur ist wörtlich die Vorgehensweise zur Linearisierung eines Objektes, genau wie die Variationsableitung ein Funktional linearisiert.

2) Siehe Script...

3a) Der Integrand hängt nur von u und u' ab,

daher ist ein 1. Integral gegeben durch

$$F(u,u') - F_2(u,u')\,u' = c\,,$$

also

$$u^2(1-u')^2 + 2u^2(1-u')\,u' = c$$

$$\Rightarrow u^2 - 2u^2u' + u^2u'^2 + 2u^2u' - 2u^2u' = c$$

$$\Rightarrow u^2(1-u'^2) = c$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{c}{u^2} = \left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

Suchen monoton wachsende Lösung (zunächst als Vermutung),

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1-\frac{c}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2-c}}{u}$$

$$\Rightarrow \frac{u\,du}{\sqrt{u^2-c}} = dx \qquad \text{mit } v = u^2 - c$$

$$\Rightarrow dv = 2du\,u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{dv}{\sqrt{v}} = \int dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{v} = x + \gamma\,, \quad \text{also} \quad u^2 - c = (x+\gamma)^2$$

1. Randbedingung: $u(2) = 1$

$\Rightarrow \quad 1 - c = (2+\gamma)^2$

$\Rightarrow \quad c = 1 - (2+\gamma)^2$

2. Randbedingung: $u(3) = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad 3 - (1 - (2+\gamma)^2) = (3+\gamma)^2$

$\Rightarrow \quad 2 + 4 + 4\gamma + \gamma^2 = 9 + 6\gamma + \gamma^2$

$\Rightarrow \quad 0 = 3 - 2\gamma$

$\Rightarrow \quad \gamma = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \quad c = 1 - \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

b) $F_{zz} = 2y^2$

Da u aus Teil a) strikt positiv ist, gilt

$$F_{zz}(u, u') > 0$$

Zur Berechnung eines Jacobifeldes, das bei $x=2$ verschwindet, betrachte die Schar der Extremalen, die nur die 1. RB erfüllen. Nach a) gilt

$$u_\gamma^2 = 1 - (2+\gamma)^2 + (x+\gamma)^2$$

$$\Rightarrow \quad 2\, u_\gamma \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = -2(2+\gamma) + 2(x+\gamma)$$

also gilt für $\gamma = -\frac{3}{2}$, $\varphi := \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}\Big|_{\gamma=-\frac{3}{2}}$,

$$u \equiv u_\gamma \Big|_{\gamma = -\frac{3}{2}} \quad :$$

$$u\,\varphi = -\left(2-\tfrac{3}{2}\right) + \left(x - \tfrac{3}{2}\right) \qquad (*)$$

Da $u > 0$ auf $[2,3]$ sind die Nullstellen von φ mit den Nullstellen der rechten Seite identisch. Es gibt aber nur eine, nämlich $x = 2$ (da wir ja die 1. RB festgehalten haben). Also gibt es keinen konjugierten Punkt in $[2,3]$. (Wichtig: Vielfache von φ sind schon alle Jacobi-Felder mit $\varphi(2) = 0$, da wir nur einen eindimensionalen Lösungsraum haben.)

$\Rightarrow$ Hinreichende Bedingung ist erfüllt.