Lösung zu Übung 3

Gauß'scher Satz (zur Erinnerung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ (z.B. $\partial\Omega$ Lipschitz). Dann gilt für ein skalares Feld $\phi = \phi(x)$ und ein Vektorfeld $v = v(x)$ (beide hinreichend glatt, z.B. $v, \phi \in C^1(\bar{\Omega})$ oder $v, \phi \in H^1(\Omega)$)

$$\int_\Omega v \cdot \nabla\phi \, dx = \int_{\partial\Omega} n \cdot v \, \phi \, do - \int_\Omega \nabla \cdot v \, \phi \, dx$$

wobei n der äußere Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega$ ist.

a) Suche Funktional $\mathcal{F}$ mit

$$0 = \delta\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \delta u \left(\Delta u + u^p \right) dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\delta u}_{=0 \text{ auf } \partial\Omega} \, n \cdot \nabla u \, do + \int_\Omega \left(-\nabla\delta u \cdot \nabla u + \delta u \, u^p \right) dx$$

$$= \int_\Omega \left(-\frac{1}{2} \delta \left(\nabla u \cdot \nabla u \right) + \frac{1}{p+1} \delta u^{p+1} \right) dx$$

wähle also

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \left[-\frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} u^{p+1} \right] dx$$

b) Suche $\mathcal{F}$ mit

$$0 = \delta \mathcal{F}(u) = \int_\Omega \delta u \left(\nabla \cdot \left(\|\nabla u\|^{q-2} \nabla u \right) + f \right) dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\delta u}_{=0 \text{ auf } \partial\Omega} \|\nabla u\|^{q-2} n \cdot \nabla u \, d\sigma + \int_\Omega \left[-\|\nabla u\|^{q-2} \nabla \delta u \cdot \nabla u + f \delta u \right] dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\Omega \left[-\frac{1}{q} \delta\left(\|\nabla u\|^q \right) + \delta(f u) \right] dx$$

wähle also $\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \left[-\frac{1}{q} \|\nabla u\|^q + f u \right] dx$

(*) check: $\delta \|\nabla u\|^q = q \|\nabla u\|^{q-1} \underbrace{\delta (\nabla u \cdot \nabla u)^{\frac{1}{2}}}_{= 2 \nabla \delta u \cdot \nabla u \ \frac{1}{2} (\nabla u \cdot \nabla u)^{-\frac{1}{2}}}$

$$= q \|\nabla u\|^{q-2} \nabla \delta u \cdot \nabla u$$