Übung 2 – Lösungen

1a) Ableitung der Umkehrfunktion:

$$v(u(x)) = x$$

$$\Rightarrow \quad v'(u(x))\; u'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{v'(u(x))} = \frac{1}{v'(y)}$$

und $\frac{dx}{dy} = v'(y) \;\Rightarrow\; dx = v'(y)\, dy$

Also: $$\mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta F(u(x), u'(x))\, dx \qquad (*)$$

$$= \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} F\left(y, \frac{1}{v'(y)}\right) v'(y)\, dy$$

$$=: \int_a^b G(y, v'(y))\, dy \qquad (**)$$

b) (**) hat 1. Integral

$$G_z(y, v'(y)) = c$$

mit $G(y,z) = F\left(y, \frac{1}{z}\right) z$

$$\Rightarrow G_z = F_z\left(y, \frac{1}{z}\right) \frac{-1}{z^2} z + F\left(y, \frac{1}{z}\right)$$

Also ist das erste Integral von (*):

$$F_z(u, u')\, u' - F(u, u') = c \; .$$

2) a) Allgemeine Lösung von $u'' = c^{-2} u$:

$$u(x) = c_1 e^{\frac{x}{c}} + c_2 e^{-\frac{x}{c}}$$

mit Randbedingungen $u(-\beta) = u(\beta) = 1$.

$$\Rightarrow \quad c_1 e^{\frac{-\beta}{c}} + c_2 e^{\frac{\beta}{c}} = 1$$

$$-) \quad c_1 e^{\frac{\beta}{c}} + c_2 e^{-\frac{\beta}{c}} = 1$$

$$-c_1 \sinh\frac{\beta}{c} + c_2 \sinh\frac{\beta}{c} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

$$\Rightarrow \quad c_1\, 2 \cosh\frac{\beta}{c} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2c_1 = \frac{1}{\cosh\frac{\beta}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{\cosh\frac{x}{c}}{\cosh\frac{\beta}{c}}$$

b) Wir müssen noch den Parameter c bestimmen.

Aus
$$v'(x) = \frac{1}{c} \frac{\sinh \frac{x}{c}}{\cosh \frac{\beta}{c}},$$

$$v''(x) = \frac{1}{c^2} v(x)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Euler-Gleichung
$$v'' v - v'^2 = 1$$

dass
$$\frac{1}{c^2} \frac{\cosh^2 \frac{x}{c}}{\cosh^2 \frac{\beta}{c}} - \frac{1}{c^2} \frac{\sinh^2 \frac{x}{c}}{\cosh^2 \frac{\beta}{c}} = 1$$

und wegen $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, dass
$$\frac{1}{c^2 \cosh^2 \frac{\beta}{c}} = 1$$

D.h. c ist die Lösung der transzendenten Gleichung
$$1 = c \cosh \frac{\beta}{c} \qquad (*)$$

c) $$\mathcal{F}(u) = \int_{-\beta}^{\beta} u \sqrt{1+u'^2}\, dx$$

$$= \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cosh \frac{x}{c}}{\cosh \frac{\beta}{c}} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \frac{\sinh^2 \frac{x}{c}}{\cosh^2 \frac{\beta}{c}}}\; dx$$

Definiere neue Variable implizit durch

$$\frac{1}{c} \frac{\sinh \frac{x}{c}}{\cosh \frac{\beta}{c}} = \sinh y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\cosh \frac{x}{c}}{\cosh \frac{\beta}{c}}\, dx = \cosh y \, dy$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \int_{-\lambda}^{\lambda} c^2 \cosh y \underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 y}}_{= \cosh y}\; dy$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 + \cosh 2y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \left(y + \underbrace{\tfrac{1}{2} \sinh 2y}_{= \sinh y \cosh y} \right) \Big|_{-\lambda}^{\lambda}$$

$$= c^2 \left(\lambda + \sinh \lambda \cosh \lambda \right)$$

Mit

$$\frac{1}{c}\,\frac{\sinh\frac{\beta}{c}}{\cosh\frac{\beta}{c}} = \sinh\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \sinh\frac{\beta}{c} = \sinh\lambda \qquad \text{wegen } (*)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\beta}{c}$$

$$\text{und } \cosh\lambda = \cosh\frac{\beta}{c} \overset{(*)}{=} \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F} = c^2\left(\frac{\beta}{c} + \left(\sinh\frac{\beta}{c}\right)\cdot\frac{1}{c}\right)$$

$$= c\left(\beta + \sinh\frac{\beta}{c}\right)$$