Übungsblatt 1 – Lösungen

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$

Aufgabe: Minimiere f unter NB $g = 0$.

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x-1 &= \lambda x \\ y &= 4\lambda y \quad \Rightarrow y = 0 \text{ oder } \lambda = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Fall 1: $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ (wegen $x^2 + 4y^2 = 4$)

Fall 2: $\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{4}x$

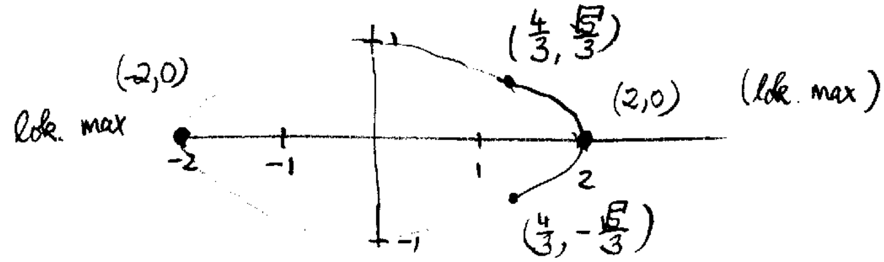
$$\Rightarrow \frac{3}{4}x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} + 4y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$



2. a) $F(x,v,v') = (v'^2-1)^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[2v' \cdot 2(v'^2-1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow v'(v'^2-1) = c$$

$\Rightarrow$ v' ist Lösung einer kubischen Gleichung und kann daher max. 3 Werte annehmen.

$\Rightarrow$ ZWS: $v' = \text{const}$

$\Rightarrow$ RB: $v \equiv 0$

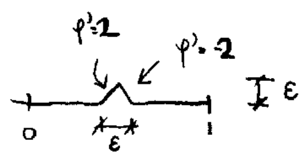
b) $$\mathcal{F}(0+\varphi) = \int_0^1 (\varphi'^4 - 2\varphi'^2 + 1)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \varphi'^2(\varphi'^2-2)\,dx}_{<0 \text{ für } |\varphi'|^2 < 2} + \mathcal{F}(0)$$

D.h. $\mathcal{F}(0+\varphi) < \mathcal{F}(0)$

$\forall \varphi$ mit $\|\varphi\|_{C^1} < 2$

$\Rightarrow$ $v=0$ ist schwaches Max.

Betrachte andererseits: $\varphi_\varepsilon =$ 

$$\Rightarrow \mathcal{F}(0+\varphi_\varepsilon) = 1-\varepsilon+3\varepsilon = 1+2\varepsilon > \mathcal{F}(0)$$

Aber: $\|\varphi_\varepsilon\|_{C^0} = \varepsilon$

③

3. $\mathcal{F}(y) = \int_0^L e^{-\frac{y}{H}} \sqrt{1+y'^2}\, dx$

Der Integrand hängt nicht explizit von x ab, also gibt es ein 1. Integral, $-F_z y' + F = C$:

$$-e^{-\frac{y}{H}} \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + e^{-\frac{y}{H}} \sqrt{1+y'^2} = C$$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{y}{H}} y'^2 + e^{-\frac{y}{H}} (1+y'^2) = C\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow e^{-2\frac{y}{H}} = C^2 (1+y'^2)$$

$$\Rightarrow y'^2 = C^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} - 1 \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\pm\sqrt{C^{-2} e^{-2y/H} - 1}} = dx \qquad (*)$$

Wir betrachten zunächst nur den aufsteigenden Ast der Bahnkurve, d.h. $y' = 0$, und wählen das positive Vorzeichen in (*).

Substitution: $u = \sqrt{C^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} - 1}$

$$\Rightarrow C^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{2}{H}\, c^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} \;\; \frac{1}{2}\left(c^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{H}\left(u^2+1\right)\frac{1}{u}$$

In (*):

$$x + \gamma = \int \frac{dy}{\sqrt{c^{-2} e^{-2y/H} - 1}}$$

$$= \int \frac{-Hu\, dy}{1+u^2}\,\frac{1}{u} = -H \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= -H \arctan u$$

$$= -H \arctan\left(c^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (***)$$

1. Randbedingung: Für $x = 0$ ist $y = 0$,

$$\gamma = -H \arctan\sqrt{\frac{1}{c^2} - 1} \qquad (****)$$

2. Randbedingung: Für $x = \lambda$ ist $y' = 0$ (Hochpunkt), dort gilt zunächst wegen (**):

$$e^{-2\frac{y}{H}} = c^2 \quad \Rightarrow \quad c^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} = 1$$

also wegen (***):

$$\lambda + \gamma = -H \arctan\sqrt{1-1} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = -\lambda$$

In (****): $-\lambda = -H \arctan\sqrt{\frac{1}{c^2}-1} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{H} \leq \frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} = 1 + \tan^2\frac{\lambda}{H} = \frac{1}{\cos^2\frac{\lambda}{H}} \Rightarrow c = \cos\frac{\lambda}{H}$$

Und in (***):

$$c^{-2} e^{-2\frac{y}{H}} - 1 = \tan^2\frac{\lambda - x}{H}$$

$$\Rightarrow e^{-2\frac{y}{H}} = \frac{\cos^2\frac{\lambda}{H}}{\cos^2\frac{\lambda-x}{H}}$$

$$\Rightarrow y = H \ln\frac{\cos\frac{\lambda-x}{H}}{\cos\frac{\lambda}{H}}$$

In's Variationsintegral eingesetzt: wegen (**) ist

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^\lambda e^{-\frac{y}{H}} \sqrt{c^{-2} e^{-2y/H}}\, dx$$

$$= c^{-1} \int_0^\lambda e^{-2\frac{y}{H}}\, dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(y) = \cos\frac{\lambda}{H} \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\cos^2\frac{\lambda-x}{H}} \qquad z = \frac{\lambda-x}{H} \quad \Rightarrow H\,dz = -dx$$

$$= \cos\frac{\lambda}{H} \underbrace{\int_0^{\frac{\lambda}{H}} \frac{H\,dz}{\cos^2 z}}_{= H \tan z \Big|_0^{\frac{\lambda}{H}}}$$

$$= H \sin\frac{\lambda}{H} =: V(\lambda)$$

<u>Beh.</u>: Die Symmetrische Lösung, also $\lambda = \frac{L}{2}$ ist die gesuchte Extremale.

<u>Begründung</u>: Angenommen, $\lambda < \frac{L}{2}$. Dann muss für das Stück der Lösung zwischen λ und L (also den Sinkflug ein Randwertproblem gelöst werden mit Randbedingungen

- $y(L) = 0$ (Klar...)
- $y(\lambda+) = y(\lambda-)$ (Stetigkeit der Bahnkurve)
- $y'(\lambda) = 0$ (am Hochpunkt, da $y \in C^2$ wg. Regularitätssatz)

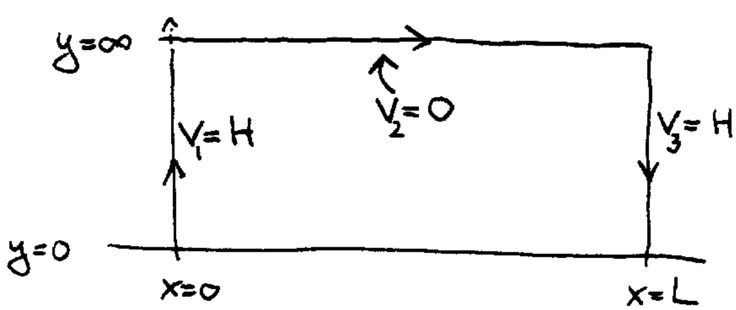
Das ist eine Randbedingung zu viel!

Es gilt also nur eine Lösung, wenn die 3. RB "zufällig" passt, was für $\lambda = \frac{L}{2}$ aus Symmetriegründen der Fall ist. Man könnte jetzt nachrechnen, dass die 3. RB sonst nirgendwo für $\lambda \in (0, \frac{L}{2})$ gilt ...

<u>Bem.:</u> Die obige Rechnung gilt nur für $\frac{\lambda}{H} \leq \frac{\pi}{2}$, also für $\frac{L}{H} \leq \pi$. Im Grenzfall $\frac{L}{H} = \pi$ ist der Gesamttreibstoffverbrauch

$$2V\left(\frac{H\pi}{2}\right) = 2H \quad .$$

Das entspricht dem Treibstoffverbrauch, um gleich ins Unendliche zu fliegen:



weil $V_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{y}{H}}\,dy = H$.

<u>Also:</u> Für $\frac{L}{H} > \pi$ ist ein Raumflug am billigsten!