Elemente der Variationsrechnung

Übungsblatt 7

25.06.2002

1. Sei $L(t,q,v) = \frac{1}{2}\,t\,(v^2 - \frac{1}{3}\,q^6)$.

   (a) Zeige, dass das Wirkungsintegral invariant ist bezüglich der Einparameterfamilie von Transformationen

   $$\boldsymbol{h}_s\colon\,(t,q) \mapsto \big((1+s)t,(1+s)^{-1/2}q\big)\,.$$

   (b) Verwende das Noether–Theorem, um das folgende erste Integral zu finden:

   $$\tfrac{1}{6}\,t^3\,q^6 + \tfrac{1}{2}\,t^3\,v^2 + \tfrac{1}{2}\,t^2\,qv = C\,.$$

2. Zeige, dass die Hamilton'sche Formulierung des Noether–Theorems für Raum-Zeit-Symmetrien lautet

   $$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}(t,\boldsymbol{q}) - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\,\xi(t,\boldsymbol{q}) = C\,,$$

   wobei $\boldsymbol{\eta}$ und ξ die infinitesimalen Generatoren der Symmetriegruppe in Raum bzw. Zeitrichtung sind.

Abgabe: Am 2.7. in der Vorlesung.