

# Elemente der Variationsrechnung

## Übungsblatt 1

23.04.2002

1. Lagrange–Multiplikatoren im  $\mathbb{R}^n$  (zur Wiederholung):

Bestimmen Sie, welcher Punkt der Ellipse

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

dem Punkt  $(1, 0)$  am nächsten liegt.

2. Fischer/Kaul, Beispiel 1.5 (c): Betrachten Sie das Funktional

$$\mathcal{F}(v) = \int_0^1 (v'(x)^2 - 1)^2 dx$$

auf der Variationsklasse

$$\mathcal{V} = \{v \in \text{PC}^1[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\}.$$

- (a) Stellen Sie die Euler–Gleichung auf und lösen Sie diese.
- (b) Zeigen Sie, dass die Lösung der Euler–Gleichung ein schwaches, aber kein starkes Maximum ist.
3. Ein in Höhe  $y = y(x)$  fliegender Flugzeug hat einen Treibstoffverbrauch pro Bogenlängeneinheit geflogener Wegstrecke von  $\exp(-y/H)$ , wobei  $H$  eine vorgegebene Konstante ist. Welche Flugkurve verbindet zwei auf Höhe 0 liegende Orte, die eine horizontale Distanz  $L$  auseinanderliegen, mit minimalem Treibstoffverbrauch?

Abgabe: Am 30.4. in der Vorlesung.