Mathematik für Bioinformatiker III (Numerik)

Übungsblatt 5

14.11.2001

1. Sei, wie in der Vorlesung,
$$x_{k+1} = x_k + B(b - Ax_k)$$
ein Relaxationsverfahren (iteratives Verfahren) zum Lösen der Gleichung $Ax = b$. Zeigen Sie, dass das Verfahren für beliebiges nichtsinguläres B konsistent ist. (Konsistent bedeutet, dass jeder Fixpunkt der Iteration schon eine Lösung von $Ax = b$ ist.)

2. Eine Matrix $A = (a_{ij})$ heißt *stark diagonal dominant*, falls für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt
$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$
Starke Diagonal-Dominanz ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Spektralradius der Jacobi- oder Gauß–Seidel-Iterationsmatrix kleiner als 1 ist.

   Sei nun A die Google-Matrix, d.h. die Matrix zum Gleichungssystem
$$r_i - d \sum_{j \text{ linkt } i} \frac{r_j}{n_j} = \frac{1-d}{N},$$
wobei r_i der Rank der i-ten Webseite ist, $i = 1, \ldots, N$, $d \in (0,1)$ der Dämpfungs- oder Durchhaltefaktor, und n_j die Zahl der von Seite j ausgehenden Links.

   Zeigen Sie, dass die Transponierte der Google-Matrix stark diagonal dominant ist. Schließen Sie daraus, dass die Google-Iteration, also das Jacobi-Verfahren für die Google-Matrix, konvergiert.

3. **Programmieraufgabe:** Schreiben Sie eine `Octave`-Funktion `gauss_seidel(A,b)`, die die Lösung der Gleichung $Ax = b$ durch Gauß–Seidel-Iteration berechnet. Geben Sie außerdem den Spektralradius der Iterationsmatrix aus.

   Testen Sie Ihr Programm mit dem Beispiel der 2. Aufgabe vom Übungsblatt 3, wo A eine Vandermonde–Matrix ist und b die Zeilensummen von A enthält.

Abgabe: Montag, 19.11.2001, um 12:30 für alle Übungsgruppen ins Postfach *Oliver* des Mathematischen Instituts, 3. Stock, C-Gebäude.

Hinweis: Bitte notieren sie rechts oben auf Ihrer Lösung, an welchem *Wochentag* und in welchem *Raum* Sie an der Übungsgruppe teilnehmen.