

Mathematik für Bioinformatiker III (Numerik)

Übungsblatt 3

31.10.2001

1. Sei, wie in der Vorlesung, $\|x\|$ die Euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$, und sei die zugehörige Matrixnorm der $n \times n$ Matrix A gegeben durch

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}},$$

wobei λ_{\max} der größte Eigenwert der Matrix $A^T A$ ist.

Hinweise: Sie können schreiben $\|x\|^2 = x^T x$. Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell und nicht negativ; die n Eigenvektoren lassen sich so wählen, dass sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden.

- (b) Zeigen Sie, dass die Konditionszahl einer orthogonalen Matrix immer 1 ist.

2. Die $n \times n$ Vandermonde Matrix ist

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \dots & 3^{n-1} \\ 1 & 4 & 16 & 64 & \dots & 4^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & (n+1)^3 & \dots & (n+1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sei b der Vektor der Zeilensummen von V . Bestimmen Sie b_i . Wie lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems $Vx = b$?

3. **Programmieraufgabe:** Schreiben Sie eine Octave-Funktion `vandermonde(n)`, die die $n \times n$ Vandermonde Matrix liefert. Berechnen Sie dann die Konditionszahlen von `vandermonde(10)` und `vandermonde(20)`. Hierbei können (und sollten) Sie möglichst die eingebauten Lineare-Algebra-Funktionen verwenden.

Abgabe: Montag, 5.11.2001, um 12:30 für alle Übungsgruppen ins Postfach *Oliver* des Mathematischen Instituts, 3. Stock, C-Gebäude.

Hinweis: Bitte notieren sie rechts oben auf Ihrer Lösung, an welchem *Wochentag* und in welchem *Raum* Sie an der Übungsgruppe teilnehmen.