Mathematik für Bioinformatiker III (Numerik)

Abschlussklausur

13.2.02

1. Sie verwenden das Newton-Verfahren, um die Gleichung $x^2 = q$ zu lösen.

   (a) Zeigen Sie, dass dies auf die Fixpunktiteration

   $$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{q}{2\,x_k}$$

   führt[1].

   (b) Sei x die exakte Lösung. Zeigen Sie, dass damit

   $$x_{k+1} - x = \frac{(x_k - x)^2}{2\,x_k}$$

   gilt. Was bedeutet das für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens?

   (2+2 Punkte)

2. Sie lösen ein lineares Gleichungssystem durch Gaußelimination ohne Pivotsuche, wobei auf der linken Seite der Gleichung eine der Matrizen

   $$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 10 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

   mit $\varepsilon = 10^{-15}$ vorkommt. In beiden Fällen stellen Sie fest, dass das Residuum Ihrer numerischen Lösung extrem groß ist. Die Ursache ist jedoch verschieden:

   (a) *Der numerische Algorithmus* ist schlecht konditioniert (eine Pivotsuche z.B. würde Abhilfe verschaffen).

   (b) *Die Matrix selbst* ist schlecht konditioniert, und selbst der beste Algorithmus wird die Gleichung nicht zufriedenstellend lösen können.

   Ordnen Sie die Fälle (a) und (b) den Matrizen A und B zu und begründen Sie Ihre Antwort kurz.

   (4 Punkte)

[1] Diese Methode zur Berechnung der Quadratwurzel war schon den Babyloniern bekannt.

3. Gegeben ist folgende Version der Van-der-Pol Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (x^2 - 1)\, y \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie den (einzigen) Fixpunkt dieser Gleichung.

   (b) Ist dieser Fixpunkt stabil?

(2+2 Punkte)

4. Bestimmen Sie den Stabilitätsbereich des impliziten Euler-Verfahrens.

(4 Punkte)

5. Das Adams–Bashforth-Verfahren 3. Ordnung zum Lösen einer Differentialgleichung der Form $\dot{x} = f(x)$ ist gegeben durch

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \left(\tfrac{23}{12}\, f_n + \alpha\, f_{n-1} + \tfrac{5}{12}\, f_{n-2} \right),$$

   wobei $f_k = f(x_k)$.

   Bestimmen Sie den noch fehlenden Koeffizienten α der Iterationsvorschrift.

(4 Punkte)

6. Wenn X die stochastische Differentialgleichung

$$dX = f(X)\, dt + g(X)\, dB$$

   erfüllt, so führt die sogenannte Itô–Taylor-Entwicklung auf

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)\, \Delta t + g(X_n)\, \Delta B_n + \tfrac{1}{2}\, g(X_n)\, g'(X_n)\, ((\Delta B_n)^2 - \Delta t) + \ldots,$$

   wobei $\Delta B_n = B(t_{n+1}) - B(t_n)$ ein diskretes Inkrement der Brown'schen Bewegung ist. Dieser Ausdruck kann direkt als numerisches Verfahren verwendet werden[2].

   Schreiben Sie einen Octave-Code, der mit dieser Methode eine Realisierung der Lösung der stochastischen logistischen Gleichung

$$dX = X\,(1 - X)\, dt + X\, dB$$

   mit Anfangswert $X(0) = \frac{1}{2}$ bis zum Zeitpunkt $T = 1$ berechnet.

(4 Punkte)

[2] Das Verfahren ist unter dem Namen Milstein-Methode bekannt, und hat im Gegensatz zum Euler–Maruyama-Verfahren die starke Konvergenzordnung 1.