

Wissenschaftliches Rechnen

Probeklausur

14.07.2025

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (10)$$

2. Beurteilen Sie die Verwendung der (i) LR-Zerlegung, (ii) Cholesky-Zerlegung und (iii) QR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bezüglich folgender Kriterien:

- (a) Welche Eigenschaften der Matrix A werden vorausgesetzt?
- (b) Ist eine Pivotierungsstrategie notwendig?
- (c) Wie verhalten sich die Algorithmen bezüglich der Anzahl der benötigten Rechenoperationen?
- (d) Sind die Algorithmen jeweils numerisch stabil?

Hinweis: Beweise sind nicht verlangt, aber formulieren Sie Ihre Antwort so konkret wie sinnvoll möglich. (10)

3. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fest und $f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$A \mapsto (I - A)^{-1}b .$$

Gegeben sei weiterhin eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit zugeordneter Operatornorm.

- (a) Zeigen Sie, dass für die relative normweise Konditionszahl von f gilt, dass

$$\kappa_{\text{rel}} \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\| .$$

- (b) Schließen Sie, dass das Problem für Matrizen A mit kleiner Operatornorm wohlkonditioniert ist. Konkretisieren Sie dabei den Begriff „kleine Operatornorm“.

Hinweis: In der Übung hatten Sie bewiesen, dass

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Sie dürfen dieses Ergebnis ohne Beweis zitieren. (5+5)

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 1 - (1 - x)^2.$$

- (a) Die Funktion werde ohne Umformung in Fließkommaarithmetik berechnet. Zeigen Sie, dass diese Berechnung für kleine x numerisch instabil ist.
- (b) Formen Sie die Funktion so um, dass sie uneingeschränkt stabil in Fließkommaarithmetik berechnet werden kann. Führen Sie den Beweis der numerischen Stabilität.

(5+5)

5. Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $m \geq n$ eine Matrix mit maximalem Rang. Zeigen Sie, dass $A^T A$ invertierbar ist. (5)

6. Zu festen $x_1, \dots, x_m$ seien fehlerbehaftete Messwerte $y_1, \dots, y_m$ gegeben. Es wird eine affin-lineare Abhängigkeit angenommen, also

$$y = a x + c.$$

Es gilt, a und c so zu bestimmen, dass der quadratische Fehler

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - (a x_i + c))^2$$

minimal wird.

- (a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem in Matrixschreibweise, also

$$\text{minimiere } \|b - Ax\|_2.$$

Wie lauten A und b ? Wie ist der Lösungsvektor x zu interpretieren?

- (b) Schreiben sie eine Lösungsformel für dieses Problem mit Hilfe der QR-Zerlegung auf. Geben Sie dabei die Dimension aller auftretenden Matrizen an.

(5+5)