1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(10)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{= A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=: R}$$

$$\Rightarrow L_2 L_1 A = R \quad \Rightarrow A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1}}_{=: L} R$$

wegen der Eigenschaften der Frobeniusmatrizen gilt sofort: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Probe: (nicht verlangt, aber sinnvoll)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+2 & -1+2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cdot 2 & -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \end{pmatrix} = A \quad \checkmark$$

2. Beurteilen Sie die Verwendung der (i) LR-Zerlegung, (ii) Cholesky-Zerlegung und (iii) QR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bezüglich folgender Kriterien:

- Welche Eigenschaften der Matrix A werden vorausgesetzt?
- Ist eine Pivotierungsstrategie notwendig?
- Wie verhalten sich die Algorithmen bezüglich der Anzahl der benötigten Rechenoperationen?
- Sind die Algorithmen jeweils numerisch stabil?

Hinweis: Beweise sind nicht verlangt, aber formulieren Sie Ihre Antwort so konkret wie sinnvoll möglich. (10)

(a) LR-Zerlegung: A quadratisch, invertierbar
(singuläre Matrizen können eine LR-Zerlegung haben, die Berechnung ist aber numerisch extrem instabil, daher in der Praxis nicht relevant.)

Cholesky: A symmetrisch, positiv definit

QR: beliebig, auch nicht-quadratisch, singular

(b) Nur LR benötigt im Allgemeinen Pivotierung. (Spaltenpivotsuche garantiert, dass jede nicht-singuläre quadratische Matrix eine LR-Zerlegung hat.)

(c) LR: Rechenops. $N \sim \frac{1}{3} n^3$ (n Unterprobleme der Größe k^2 für $k=1, \dots, n$)

Cholesky: $N \sim \frac{1}{6} n^3$ (Symmetrie spart Hälfte der Rechenops.)

QR: $N \sim \frac{4}{3} n^3$ (Schema ähnlich LR, aber 2x Drehung statt einer einzelnen Multiplikation, also 4 Mal so teuer.)

(d) LR ist nicht garantiert stabil, aber in der Praxis für typische Matrizen hinreichend stabil.

Cholesky ist stabil, da die konstruierte R-Matrix ein Spiegel von L ist, die Elemente also nicht wachsen können. (Da A pos. def., könnten wir zeigen, dass die Elemente von L ohne Pivotierung beschränkt bleiben!)

QR ist ebenfalls stabil, da alle Rechenoperationen bei der Zerlegung Drehungen sind, die Fehler nicht verstärken. (Konditionszahl jeder Givens-Rotation ist 1.)

3. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ fest und $f: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$A \mapsto (I - A)^{-1}b.$$

Gegeben sei weiterhin eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit zugeordneter Operatornorm.

(a) Zeigen Sie, dass für die relative normweise Konditionszahl von f gilt, dass

$$\kappa_{\text{rel}} \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\|.$$

(b) Schließen Sie, dass das Problem für Matrizen A mit kleiner Operatornorm wohlkonditioniert ist. Konkretisieren Sie dabei den Begriff „kleine Operatornorm“.

Hinweis: In der Übung hatten Sie bewiesen, dass

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (*)$$

Sie dürfen dieses Ergebnis ohne Beweis zitieren.

(5+5)

$$(a) \quad f(A) = (I - A)^{-1}b \quad \Rightarrow \quad (I - A)f = b$$

$$\Rightarrow \underbrace{\delta(I - A)}_{= -\delta A} f + (I - A) \delta f = 0$$

$$\Rightarrow \delta f = (I - A)^{-1} \delta A f = (I - A)^{-1} \delta A (I - A)^{-1} b$$

$$(\text{oder } f'(A)B = (I - A)^{-1} B (I - A)^{-1} b)$$

$$\text{Damit ist } \kappa_{\text{abs}} \leq \|(I - A)^{-1}\| \|f(A)\|$$

$$\Rightarrow \kappa_{\text{rel}} = \kappa_{\text{abs}} \frac{\|A\|}{\|f(A)\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\|$$

$$(b) \quad \kappa_{\text{rel}} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}, \quad \text{d.h.} \quad \kappa_{\text{rel}} \leq \frac{1}{1 - c} \quad \text{für} \quad \|A\| \leq c < 1$$

Möchten wir also $\kappa_{\text{rel}} \leq M$ garantieren, so muss $c = 1 - \frac{1}{M}$ gewählt werden.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = 1 - (1 - x)^2.$$

- (a) Die Funktion werde ohne Umformung in Fließkommaarithmetik berechnet. Zeigen Sie, dass diese Berechnung für kleine x numerisch instabil ist.
- (b) Formen Sie die Funktion so um, dass sie uneingeschränkt stabil in Fließkommaarithmetik berechnet werden kann. Führen Sie den Beweis der numerischen Stabilität.

(5+5)

$$(a) \quad 1 \hat{=} x = (1-x)(1+\delta_1) \quad \text{mit } |\delta_1| \leq \epsilon_M$$

$$(1 \hat{=} x)^{\wedge 2} = (1-x)^2 (1+\delta_1)^2 (1+\delta_2) \quad \text{mit } |\delta_2| \leq \epsilon_M$$

$$\doteq (1-x)^2 (1+\delta_3) \quad \text{mit } |\delta_3| \leq 3 \epsilon_M$$

$$1 \hat{=} (1 \hat{=} x)^{\wedge 2} \doteq (1 - (1-x)^2 (1+\delta_3)) (1+\delta_4) \quad \text{mit } |\delta_4| \leq \epsilon_M$$

$$= \left(1 - (1-x)^2\right) (1+\delta_4) - (1-x)^2 \delta_3 (1+\delta_4)$$

$$\Rightarrow \frac{|\hat{f} - f|}{|f|} \doteq \frac{|1-x|^2}{|1-(1-x)^2|} \delta_3 + \delta_4$$

kann beliebig groß werden für $|x|$ hinreichend klein, damit kann dieser Term nicht durch $\#(\text{Rechenops}) \cdot \kappa_{\text{rel}} \cdot \epsilon_M$ abgeschätzt werden.

$\Rightarrow$ Berechnung ist instabil.

$$(b) \quad f(x) = 1 - (1 - 2x + x^2) = 2x - x^2 = x(2-x)$$

$$\Rightarrow \hat{f} = x \cdot (2-x) (1+\delta_5)(1+\delta_6) \quad \text{mit } |\delta_5|, |\delta_6| \leq \epsilon_M$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\hat{f} - f}{f} \right| \leq (|\delta_5| + |\delta_6|) \leq 2 \epsilon_M. \quad \text{Ein relativer Fehler von } \epsilon_M \text{ ist optimal, die Rechnung ist stabil.}$$

5. Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $m \geq n$ eine Matrix mit maximalem Rang. Zeigen Sie, dass $A^T A$ invertierbar ist. (5)

Da $\text{Ker } A^T = (\text{Im } A)^\perp$ gilt $\text{Ker } A^T A = \text{Ker } A = \{0\}$ $\square$
↑
nach Voraussetzung

6. Zu festen $x_1, \dots, x_m$ seien fehlerbehaftete Messwerte $y_1, \dots, y_m$ gegeben. Es wird eine affin-lineare Abhängigkeit angenommen, also

$$y = ax + c.$$

Es gilt, a und c so zu bestimmen, dass der quadratische Fehler

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - (ax_i + c))^2$$

minimal wird.

- (a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem in Matrixschreibweise, also

$$\text{minimiere } \|b - Ax\|_2.$$

Wie lauten A und b ? Wie ist der Lösungsvektor x zu interpretieren?

- (b) Schreiben sie eine Lösungsformel für dieses Problem mit Hilfe der QR-Zerlegung auf. Geben Sie dabei die Dimension aller auftretenden Matrizen an.

$$(a) \text{ Sei } b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & | \\ \vdots & | \\ x_n & | \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad (5+5)$$

$$\Rightarrow b - Ax = \begin{pmatrix} y_1 - (ax_1 + c) \\ \vdots \\ y_n - (ax_n + c) \end{pmatrix} \Rightarrow \|b - Ax\|^2 = (y_1 - (ax_1 + c))^2 + \dots + (y_n - (ax_n + c))^2$$

Damit ist: "Minimiere E " äquivalent zu "minimiere $\|b - Ax\|$ ",

$a = x_1$ ist die Steigung der Ausgleichsgeraden, $c = x_2$ der y -Achsenabschnitt.

$$(b) \text{ Sei } A = QR \quad Q \in O(n), \quad R \in \text{Mat}_{n \times 2}(\mathbb{R}) \text{ rechte obere Dreiecksmatrix} \\ = Q_1 R \quad Q_1 \in \text{Mat}_{n \times 2}(\mathbb{R}) \text{ die ersten beiden Spalten von } Q \\ R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \underbrace{0}_2 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \} 2 \\ \} n-2 \end{array} \right.$$

Dann ist $x = R_1^{-1} Q_1^T b$ (oder $R_1 x = Q_1^T b$ als gestuftes LGS).