1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotierung der Matrix A, d.h., bestimmen Sie eine Permutationsmatrix P, unipotente untere Dreiecksmatrix L und obere Dreiecksmatrix R, so dass $PA = LR$.

   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Zerlegung aus (a) für

$$b = (8, 6, 7, 1)^T$$

(15+5)

2. (a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

   sind die Bedingungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt?

   (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7+8)

3. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig.

   (a) Sei $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ mit $1 \leq k \leq n$ und definiere

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & v_1 & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & v_{n-k} & & 1 \end{pmatrix}.$$

   Es gilt $(U_v)^{-1} = U_{-v}$.

(b) Seien $A \in L(X,Y)$ und $B \in L(Y,Z)$. Es gilt $\|BA\|_{L(X,Z)} \le \|B\|_{L(Y,Z)} \|A\|_{L(X,Y)}$.

(c) Die Konditionszahl der 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist klein für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) LR-Zerlegung ist aufwendiger als Cholesky- und QR-Zerlegung.

(e) In der QR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ist die obere Dreicksmatrix R genau dann invertierbar wenn $m = n$ und A invertierbar ist.

(5+5+5+5+5)

4. Zeigen Sie, dass die Berechnung der Summe

$$s \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j$$

numerisch stabil ist. (10)

5. Zeigen Sie, dass das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = Ax_k + c$ mit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und $c \in \mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn $\rho(A) < 1$, wobei $\rho(A)$ der Spektralradius von A ist. (Also $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ den Eigenwerten von A.) (10)