

Wissenschaftliches Rechnen

Nachklausur

06.10.2025

Vorname:

Nachname:

Unterschrift:

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotierung der Matrix A , d.h., bestimmen Sie eine Permutationsmatrix P , unipotente untere Dreiecksmatrix L und obere Dreiecksmatrix R , so dass $PA = LR$.
- (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Zerlegung aus (a) für

$$b = (8, 6, 7, 1)^T$$

(15+5)

(a) 2. Zeile ist Pivotzeile. Mit $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die 4. Zeile ist jetzt Pivotzeile, d.h. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$$P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

Die 4. Zeile ist wieder Pivotzeile, d.h. $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

(leeres Blatt)

$$\Rightarrow L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{9}{17} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_3 P_3}_{=: \hat{L}_2} L_2 P_2 L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{17} \end{pmatrix} =: R$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} P_3$$

$$\underbrace{\quad}_{=: \hat{L}_2}$$

$$\text{mit } P_3 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{P_3 P_2 P_1}_{=: P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: P$$

$$\text{und } P_3 P_2 L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{P_3 P_2}_{=: \hat{L}_1}$$

$$\text{so dass } L = \hat{L}_1 \hat{L}_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{9}{12} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad P_6 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad PAx = P_6 \Rightarrow \underbrace{L R x}_{=: y} = P_6$$

3

$$\Rightarrow y_1 = 6, \quad \frac{2}{3}y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -3, \quad -\frac{1}{4}y_2 + y_3 = 8 \Rightarrow y_3 = \frac{29}{4}, \quad \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{9}{17}y_3 + y_4 = 7$$

$$\Rightarrow y_4 = 7 - \frac{9 \cdot 29}{17 \cdot 4} - \frac{3}{4} - 2 = \frac{17}{4} - \frac{9 \cdot 29}{4 \cdot 17} = \frac{17 \cdot 17 - 9 \cdot 29}{4 \cdot 17} = \frac{28}{4 \cdot 17} = \frac{7}{17}$$

$$Rx = y \Rightarrow \frac{7}{17}x_4 = \frac{7}{17} \Rightarrow \underline{x_4 = 1}, \quad \frac{17}{4}x_3 + 3x_4 = \frac{29}{4} \Rightarrow \underline{x_3 = 1}, \quad -4x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow \underline{x_2 = 1}, \quad 3x_1 + 3x_2 = 6 \Rightarrow \underline{x_1 = 1}$$

2. (a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

sind die Bedingungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt?

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7+8)

(a) A muss symmetrisch sein, also $\beta=0$.

A muss pos. def. sein, also muss $p_A(\lambda) = (A - \lambda I)$ positive Nullstellen haben.

$$p_A(\lambda) = (\alpha - \lambda)^3 - 2(\alpha - \lambda) = (\alpha - \lambda)((\alpha - \lambda)^2 - 2)$$

$$\text{Nullstellen: } \lambda = \alpha, \quad (\lambda - \alpha)^2 = 2 \Rightarrow \lambda - \alpha = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} + \alpha$$

Die kleinste Nullstelle ist $\lambda_{\min} = -\sqrt{2} + \alpha > 0 \Rightarrow$ $\alpha > \sqrt{2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^{-1}} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\Rightarrow A = \tilde{L} \tilde{L}^T \quad \text{mit} \quad \tilde{L} = L \sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

3. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig.

(a) Sei $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ mit $1 \leq k \leq n$ und definiere

$$U_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & v_1 & \\ & & & \vdots & \ddots \\ 0 & & v_{n-k} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $(U_v)^{-1} = U_{-v}$.

(b) Seien $A \in L(X, Y)$ und $B \in L(Y, Z)$. Es gilt $\|BA\|_{L(X, Z)} \leq \|B\|_{L(Y, Z)} \|A\|_{L(X, Y)}$.

(c) Die Konditionszahl der 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist klein für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) LR-Zerlegung ist aufwendiger als Cholesky- und QR-Zerlegung.

(e) In der QR-Zerlegung der Matrix $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ist die obere Dreiecksmatrix R genau dann invertierbar wenn $m = n$ und A invertierbar ist.

(5+5+5+5+5)

(a) Korrekt. Wegen der Blockdiagonalstruktur reicht es, die Behauptung für den rechten unteren nicht-trivialen Diagonalblock zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} I & \sigma^T \\ v & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^T \\ -v & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - \sigma^T v & I \sigma^T - \sigma^T I \\ v \cdot I - I v & v \sigma^T - I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \sigma^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$(b) \text{ Korrekt. } \|BA\|_{L(X, Z)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|BAx\|_Z}{\|x\|_X} \stackrel{(*)}{=} \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Ax \neq 0}} \frac{\|BAx\|_Z}{\|Ax\|_Y} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

$$\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|By\|_Z}{\|y\|_Y} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|B\|_{L(Y, Z)} \|A\|_{L(X, Y)}$$

(*) Falls $A \neq 0$. Wenn $A = 0$ ist nichts zu beweisen.

(c) Falsch. $\|A\| \geq \|Ae_2\| \geq \| \alpha e_1 + e_2 \| \geq |\alpha| \|e_1\| \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \infty$

(leeres Blatt) Ebenso $\|A^{-1}\| \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \rightarrow \infty \text{ für } \alpha \rightarrow \infty$$

(d) Falsch. LR ist zwar doppelt so teuer wie Cholesky, aber QR ist viermal so teuer (asymptotisch) wie LR.

(e) Richtig. $m=n$ ist notwendig, um überhaupt die Invertierbarkeit von R zu untersuchen. Da Q als Orthogonalmatrix immer invertierbar ist, ist $\text{Rank } A = \text{Rank } R$, damit A invertierbar gdw. R invertierbar.

4. Zeigen Sie, dass die Berechnung der Summe

$$s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j$$

numerisch stabil ist.

(10)

$$x_1 \hat{+} x_2 = (x_1 + x_2)(1 + \delta_1) \quad \text{mit } |\delta_1| \leq \epsilon_M$$

$$\begin{aligned} (x_1 \hat{+} x_2) \hat{+} x_3 &= ((x_1 + x_2)(1 + \delta_1) + x_3)(1 + \delta_2) \quad \text{mit } |\delta_2| \leq \epsilon_M \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(1 + \delta_1 + \delta_2) \end{aligned}$$

Durch Iteration dieser Rechnung erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^n \hat{x}_j = \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) (1 + \delta_1 + \dots + \delta_{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\left| \sum_{j=1}^n \hat{x}_j - \sum_{j=1}^n x_j \right|}{\left| \sum_{j=1}^n x_j \right|} \leq (n-1) \epsilon_M$$

Damit ist der Stabilitätsindikator durch die Anzahl der Rechenoperationen beschränkt, die Berechnung ist numerisch stabil.

5. Zeigen Sie, dass das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = Ax_k + c$ mit $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und $c \in \mathbb{R}^n$ genau dann konvergiert, wenn $\rho(A) < 1$, wobei $\rho(A)$ der Spektralradius von A ist. (Also $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ den Eigenwerten von A .) (10)

$$x_{k+1} = Ax_k + c$$

$$\Rightarrow x_1 = Ax_0 + c$$

$$x_2 = Ax_1 + c = A^2x_0 + Ac + c$$

$$\vdots$$

$$x_k = A^k x_0 + (A^{k-1} + \dots + A^0)c$$

Da A symmetrisch, kann sie orthogonal diagonalisiert werden, d.h.

$$A = UDU^T \quad \text{mit } U \in O(n)$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow A^{k-1} + \dots + A^0 = U(D^{k-1} + \dots + D^0)U^T$$

$$= U \text{diag}\left(\frac{\lambda_1^k - 1}{\lambda_1 - 1}, \dots, \frac{\lambda_n^k - 1}{\lambda_n - 1}\right)U^T \quad (\text{geom. Reihe})$$

Die Diagonaleinträge $\frac{\lambda_i^k - 1}{\lambda_i - 1}$ konvergieren genau dann, wenn $|\lambda_i| < 1$.

Dann konvergiert auch $A^k x_0$, und zwar gegen 0 für $k \rightarrow \infty$.

Also: $\rho(A) < 1 \Rightarrow x_k$ konvergiert.

8

Andererseits: Mit $x_0 = 0$ und mindestens einem $|\lambda_i| \geq 1$

konvergiert $A^{k-1} + \dots + A^0$ nicht, damit konvergiert x_k ebenfalls nicht.

(leeres Blatt)