Wissenschaftliches Rechnen

Abschlussklausur

08.08.2025

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

2. Zeigen Sie, dass die LR-Zerlegung einer Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ohne Pivotierung

$$N \doteq \frac{1}{3} n^3$$

Multiplikationen benötigt. (5)

3. Sei $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $m \geq n$ und maximalem Rang.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\|b - Ax\|_2$$

minimal wird genau dann wenn

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\|(A^T A)^{-1} A^T\|_2 = \frac{1}{\min_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2}.$$

- (c) Schließen Sie daraus, dass für die Lösungsabbildung aus Teil (a),

$$b \mapsto (A^T A)^{-1} A^T b$$

gilt, dass die relative Konditionszahl bezüglich der 2-Norm der Abschätzung

$$\kappa_{\text{rel}} \leq \frac{\|b\|_2}{\|Ax\|_2} \kappa_2(A)$$

genügt.

- (d) Wie unterscheidet sich die relative Konditionszahl aus Teil (c) von der relativen Konditionszahl (ebenfalls bezüglich der 2-Norm) eines linearen Gleichungssystems mit quadratischer nichtsingulärer Matrix A ? Wann ist das lineare Ausgleichsproblem wesentlich schlechter konditioniert?

Hinweis: Die Konditionszahl bezüglich der 2-Norm für eine nichtquadratische Matrix ist definiert

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2}{\min_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2}.$$

(5+5+5+5)

4. Gegeben sei die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x+1}.$$

- (a) Die Funktion werde ohne Umformung in Fließkommaarithmetik berechnet. Zeigen Sie, dass diese Berechnung für große x numerisch instabil ist.
- (b) Formen Sie die Funktion so um, dass sie uneingeschränkt stabil in Fließkommaarithmetik berechnet werden kann. Führen Sie den Beweis der numerischen Stabilität.

(5+5)

5. Zu festen $x_1, \dots, x_m$ seien fehlerbehaftete Messwerte $y_1, \dots, y_m$ gegeben. Es wird eine quadratische Abhängigkeit angenommen, also

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Es gilt, die Koeffizienten c_0, c_1 und c_2 so zu bestimmen, dass der quadratische Fehler

$$E = \sum_{i=1}^m (y_i - (c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2))^2$$

minimal wird.

- (a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem in Matrixschreibweise.
- (b) Das Ausgleichsproblem kann sowohl (i) über die QR-Zerlegung oder (ii) über die Cholesky-Zerlegung der Normalgleichung (vergl. auch Aufgabe 3) gelöst werden. Beurteilen Sie beide Lösungswege hinsichtlich der Anzahl der Rechenoperationen sowie der numerischen Stabilität.

(5+5)