

Wissenschaftliches Rechnen – Wiederholungsaufgaben

Sommersemester 2025

Zur Besprechung am 01.08.2025 um 16:00

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Führen Sie eine QR-Zerlegung mit dem Gram–Schmidt-Verfahren durch.
- (b) Führen Sie eine QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen durch. (Ein Schritt reicht, da die Rechnung aufwändiger ist.)

2. Führen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch.

- 3. Sei $\|\cdot\|$ eine Operatornorm. Zeigen Sie, dass für den Spektralradius einer Matrix A gilt, dass $\rho(A) \leq \|A\|$.
- 4. Sei A eine symmetrisch positiv-definite Matrix. Zeigen Sie, dass sich ω so wählen lässt, dass die gedämpfte Richardson-Iteration

$$x_{k+1} = x_k + \omega (b - Ax_k)$$

konvergiert.

5. Deuffhard/Hohmann, Aufgabe 8.2