Wiederholung - Lösungen

1. (a)

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - q_1 \underbrace{q_1^T a_2}_{=0} = a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_3 = a_3 - q_1 \underbrace{q_1^T a_3}_{=0} - q_2 \underbrace{q_2^T a_3}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \sqrt{2}\, q_1 \qquad a_2 = \sqrt{3}\, q_2 \qquad a_3 = \frac{2}{3}\sqrt{6}\, q_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\, q_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} q_2 + \sqrt{\frac{8}{3}}\, q_3$$

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{\equiv Q} \overbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}}^{=:R}$$

$$\equiv Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

(3) Offensichtlich gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

somit ist die erste Givens-Matrix

$$Q_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_1^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt brauchen wir wieder eine Matrix

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{2}c + s = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}s - c = 0 \end{array}\right\} \quad 2s + s = \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c = \sqrt{1-s^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow Q_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow Q_2^T Q_1^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$$

und $Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$

2. <u>Option A:</u> Über reguläre LR-Zerlegung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\Rightarrow \quad A = L_1^{-1} L_2^{-1} R = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}_{=:D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

$$\bar{L} := L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

<u>Option B:</u> Direkter Algorithmus:

$$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2} \qquad \ell_{22} = \sqrt{a_{22} - \ell_{21}^2} = \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\ell_{21} = a_{21}/\ell_{11} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \ell_{32} = (a_{32} - \ell_{31}\ell_{21})/\ell_{22} = (-1-0)/\sqrt{\tfrac{3}{2}} = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$\ell_{31} = a_{31}/\ell_{11} = 0 \qquad \ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = \sqrt{2 - 0^2 - \tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. Sei v mit $\|v\|=1$ ein Eigenvektor zum maximalen Eigenwert von A.

$$\Rightarrow \quad \varrho(A) = \left|v^T A v\right| \underset{\uparrow}{\leq} \|v\| \, \|A^T\| \, \|v\| = \|A\| \qquad \square$$

Cauchy-Schwarz,
sowie $\|A v\| \leq \|A\| \, \|v\|$ für jede Operatornorm

4. $$x_{k+1} = (I - \omega A) x_k + \omega b$$

Zu zeigen: $\exists \omega \in \mathbb{R}$ so dass $\varrho(I - \omega A) < 1$

Da A SPD, gibt es eine Orthogonalmatrix U, so dass

$$A = U D U^T$$, D diagonal mit positiven Diagonalelementen $0 < \lambda_{min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{max}$

$$\Rightarrow \quad I - \omega A = U (I - \omega D) U^T$$

Wir fordern: $1 - \omega \lambda_{min} < 1 \quad \Rightarrow \omega > 0$

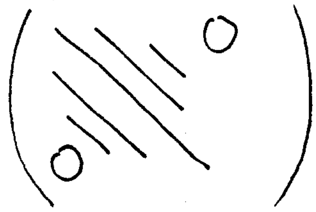
$1 - \omega \lambda_{max} > -1 \quad \Rightarrow 2 > \omega \lambda_{max} \Rightarrow \omega < \frac{2}{\lambda_{max}}$

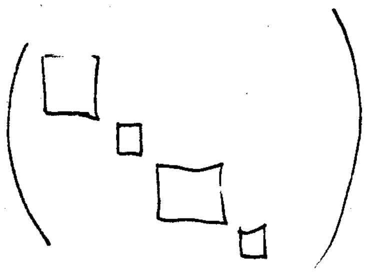
So eine Wahl ist immer möglich, z.B.

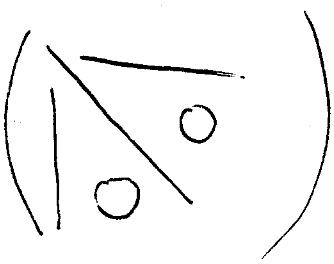
$$1 - (1 - \omega \lambda_{min}) = (1 - \omega \lambda_{max}) - (-1)$$

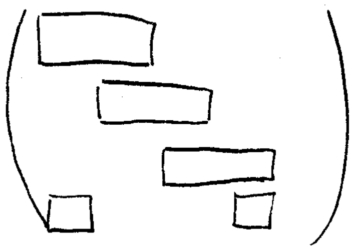
$$\Rightarrow \quad \omega \lambda_{min} + \omega \lambda_{max} = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

D/H Aufgabe 8.2:

A =  (Bandmatrix)

B =  (Blockdiagonalmatrix)

C =  (Pfeilmatrix)

D =  (Blockzyklische Matrix)

(a) LR

- Bei A ohne Pivotierung "in-place" in $O(nk)$ Rechenops, wobei k die Anzahl der Nebendiagonalen ist.
- Bei Pivotierung: Anzahl der oberen Nebendiagonalen erhöht sich i.A. entsprechend der Anzahl der unteren Nebendiagonalen.

- Bei B: jeder Block kann als separate volle LR-Zerlegung berechnet werden ⇒ kein extra Speicher,

  Rechenaufwand ist Summe der jeweiligen kleinen LR-Zerlegungen, also typisch $O(n)$.

- Bei C: kompletter Fill-In, damit n^2 Speicher und $\sim \frac{1}{3} n^3$ Ops.

  (Permutiert man 1. Zeile und 1. Spalte in die jeweils letzte Position, so ist eine effiziente, d.h. $O(n)$-Zerlegung möglich.

- Bei D: Fill-In nur in letzter Block-Zeile, daher effizient lösbar ($O(n)$ und In-Place bis auf letzte Block-Zeile)

(c) QR:

- A: ähnlich LR, durch Rotation entsteht eine weitere Diagonale.
- B: wie LR
- C: Kann effizient, d.h. $O(n)$, gelöst werden, allerdings werden die Diagonale und die 1. Zeile durch die Givens-Rotationen „gedoppelt", so dass etwa n zusätzliche Zahlen gespeichert werden müssen.
- D: ähnlich LR, allerdings ist der Fill-In in der ersten Block-<u>Spalte</u>, nicht in der ersten Block-Zeile.