Wissenschaftliches Rechnen – Übungsaufgaben

Sommersemester 2025

Zur Besprechung am 07.07.2025

1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $b \in \operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Damit ist das lineare Gleichungssystem
$$Ax = b$$
lösbar, die Lösung aber nicht eindeutig. Um eine kanonische Wahl zu treffen, suchen wir die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ mit kleinster 2-Norm.

   (a) Zeigen Sie, dass die Lösung kleinster 2-Norm als Teil des Lösungsvektors des erweiterten linearen Gleichungssystems
   $$\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$
   berechnet werden kann.

   (b) Zeigen Sie, dass das erweitere Gleichungssystem in (a) konsistent ist genau dann wenn $b \in \operatorname{Im} A$.

   (c) Zeigen Sie, dass
   $$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : u \in \operatorname{Ker} A^T \right\} .$$
   Schließen Sie daraus, dass x in Aufgabenteil (a) eindeutig bestimmt ist.

2. Sei $Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ orthogonal. Zeigen Sie, dass $\kappa_2(Q) = 1$.

3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $m > n$ und QR-Zerlegung
$$A = Q \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1 R_1 ,$$
wobei Q eine Orthogonalmatrix und R_1 eine nichtsinguläre rechte obere Dreiecksmatrix ist.

   Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat eine Lösung genau dann wenn $b = Q_1 Q_1^T b$.

4. Berechnen Sie die reduzierte QR-Zerlegung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $W \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine SPD-Matrix.

   (a) Zeigen Sie, dass

   $$\|x\|_W^2 = x^T W x$$

   eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert. (Hinweis: Benutzen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix W!)

   (b) Leiten Sie die Normalengleichung zur Lösung des verallgemeinerten Ausgleichsproblems

   $$\|b - Ax\|_W \text{ minimal}$$

   her.