Übungsblatt 6 – Lösungen

1.(a) Das Problem lässt sich formulieren:

minimiere $f(x) = x^T x$

unter der Nebenbedingung

$$g(x) = b - Ax = 0 .$$

Nach dem Satz über Lagrange'sche Multiplikatoren ist notwendig, dass die Ableitung der Lagrangefunktion

$$L(x) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ verschwindet. Wir berechnen die Ableitung bequemerweise als Variationsableitung:

$$\delta L = \delta(x^T x) + \lambda^T \delta(b - Ax)$$

$$= \delta x^T x + x^T \delta x - \lambda^T A \delta x$$

$$= (2x^T - \lambda^T A)\, \delta x$$

(Also ist $L'(x) = 2x^T - \lambda^T A$)

Dieser Ausdruck verschwindet für alle $\delta x \in \mathbb{R}^n$ gdw.

$$2x^T - \lambda^T A = 0 \quad \text{oder} \quad x + A^T m = 0 \quad , \quad m = -\tfrac{1}{2}\lambda$$

Gleichzeitig muss noch die Nebenbedingung $Ax = b$ gelten, also

$$\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} . \qquad (*)$$

Diese Bedingung ist bereits hinreichend, da nach Voraussetzung eine Lösung existiert, und

$$f(x) \longrightarrow \infty \quad \text{für } \|x\| \to \infty \,,$$

damit auch eine Minimallösung existieren muss.

(b) "$\Rightarrow$": Sei (*) konsistent. Dann gilt schon

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

somit insbesondere $b \in \operatorname{Im} A$

"$\Leftarrow$": Nach Übungsblatt 1, Aufgabe 1 gilt:

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^T \qquad (**)$$

$b \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n : b = Ax$

o.B.d.A. kann x so gewählt werden, dass $x \perp \operatorname{Ker} A$.

Dann gilt nach (**): $x \in \operatorname{Im} A^T$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}^m : x = -A^T m$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} \begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$,

d.h. das System ist konsistent.

(c) Wir müssen lösen:

$$\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \begin{matrix} v + A^T u = 0 \\ Av = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad v \in \operatorname{Ker} A$

Nach (**) gilt: $\quad v \in (\operatorname{Im} A^T)^\perp$

$$\Rightarrow \quad v \perp A^T u \quad \text{und} \quad v + A^T u = 0$$

Damit gilt: $v = 0$ und $A^T u = 0$, also $u \in \operatorname{Ker} A^T$.

Wir können also schreiben:

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} I & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : \ u \in \operatorname{Ker} A^T \right\}$$

2. Es gilt $\|Q\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \underbrace{x^T \underbrace{Q^T Q}_{=I} x}_{=\|x\|_2^2} = 1$

und aus gleichem Grund $\|Q^T\|_2^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \, \|Q^{-1}\|_2 = \|Q\|_2 \, \|Q^T\|_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

3. Es gilt $P_{\operatorname{Im} A} = P_{\operatorname{Im} Q_1} = Q_1 Q_1^T$. Also:

$$Ax = b \text{ lösbar} \Leftrightarrow b \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow P_{\operatorname{Im} A} b = b \Leftrightarrow Q_1 Q_1^T b = b$$

4. Wir berechnen zunächst die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung:

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ a_1 & a_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q}_1 = a_1 \qquad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2}\, q_1$$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - P_{q_1} a_2 = a_2 - q_1 \underbrace{q_1^T a_2}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-1) = -\sqrt{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \sqrt{2}\, q_2 = a_2 + \sqrt{2}\, q_1$$

$$\Rightarrow a_2 = -\sqrt{2}\, q_1 + \sqrt{2}\, q_2$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Da W pos. def., gilt $x^T W x \geq 0$ und $x^T W x = 0$ gdw. $x = 0$.

Damit ist $\|x\|_W = \sqrt{x^T W x}$ reell, nichtnegativ, und 0 gdw $x = 0$.

$$\|\lambda x\|_W = \sqrt{\lambda^2 x^T W x} = |\lambda| \sqrt{x^T W x} = |\lambda|\, \|x\|_W.$$

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, benutzen wir die Choleskyzerlegung

$$W = LL^T.$$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_W^2 &= x^T W x + 2x^T W y + y^T W y \\
&= \|x\|_W^2 + 2\underbrace{x^T L L^T y}_{\substack{= (L^T x)^T (L^T y) \\ \leq \|L^T x\| \, \|L^T y\| \text{ (Cauchy-Schwarz)} \\ = \|x\|_W \|y\|_W}} + \|y\|_W^2 \\
&\leq \left(\|x\|_W + \|y\|_W \right)^2
\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Dreiecksungleichung.