Wissenschaftliches Rechnen – Übungsaufgaben

Sommersemester 2025

Zur Besprechung am 30.06.2025

1. Beweisen Sie Satz 2.36 im Deuflhard/Hohmann unter Verwendung von Satz 2.34 und Lemma 2.35, mit der abgeschwächten Konstanten $3n$ anstelle von $2n$.

2. Deuflhard/Hohmann, Aufgabe, 2.20

3. Lesen Sie Deuflhard/Hohmann, Seiten 62–64 bis Bemerkung 3.8 einschließlich durch.

   Führen Sie den Beweis von Satz 3.7 alternativ direkt, ohne Bezugnahme auf Satz 3.4. Gehen Sie dabei folgenderweise vor. Für die „Hinrichtung“ betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \|b - Ax\|^2 = (b - Ax)^T(b - Ax)\,.$$

   Die notwendige Bedingung zur Existenz des Minimums ist das Verschwinden der ersten Ableitung. Berechnen Sie diese (die Verwendung der variationelle Ableitung in δ-Notation erleichtert die Rechnung wie schon in früheren Beispielen aus der Vorlesung). Die Rechnung führt auf einen Ausdruck, der einer Zeile der Folge der Äquivalenzumformungen aus dem Beweis vom Deuflhard/Hohmann entspricht.

   Ergänzen sie dann das Argument um die notwendigen Erläuterungen. Dazu gehört insbesondere, warum die Lösung nicht nur notwendig, sondern schon hinreichend ist. Ebenfalls ist die „Rückrichtung“ noch einmal getrennt zu argumentieren, wobei Sie ggf. noch Ideen aus dem Beweis von Satz 3.4 ziehen müssen.

4. Zeigen Sie, dass die „Normalgleichungen“ aus Deuflhard/Hohmann, Satz 3.7 äquivalent sind zu
$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$
   wobei die Komponenten r in dieser Formulierung genau dem Residuum der Ausgleichslösung entsprechen.

5. Rechnen Sie den Beweis von Deuflhard/Hohmann, Satz 3.13 explizit nach. (Die Darstellung im Buch ist vollständig, es geht also nur darum, ein zentrales Resultat noch einmal nachzuvollziehen.)