

Übungsblatt 5 - Lösungen

1. Um $Ax = b$ zu berechnen:

(i) Berechne $A = LR$ (LR-Zerlegung)

(ii) Löse $Ly = b$ (gestuftes Gleichungssystem)

(iii) Löse $Rx = y$ (gestuftes Gleichungssystem)

Werden diese Schritte in Gleitkommaarithmetik durchgeführt, so erhält man für die Rückwärtsfehler:

$$(i) \quad \hat{L} \hat{R} = \hat{A} \quad \text{mit} \quad |A - \hat{A}| \leq n |\hat{L}| |\hat{R}| \varepsilon_M \quad \text{nach Lemma 2.35}$$

$$(ii) \quad \hat{L} \hat{y} = b \quad \text{mit} \quad |\hat{L} - \hat{L}| \leq n |\hat{L}| \varepsilon_M \quad \text{nach Lemma 2.34}$$

$$(iii) \quad \hat{R} \hat{x} = \hat{y} \quad \text{mit} \quad |\hat{R} - \hat{R}| \leq n |\hat{R}| \varepsilon_M \quad \text{nach Lemma 2.34 (transponiert)}$$

Setze nun $\hat{A} = \hat{L} \hat{R}$. Dann gilt

$$\textcircled{1} \quad \hat{A} \hat{x} = \hat{L} \hat{R} \hat{x} = \hat{L} \hat{y} = b$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad |A - \hat{A}| &= \underbrace{|A - \hat{A}|}_{\leq n |\hat{L}| |\hat{R}| \varepsilon_M} + \underbrace{|\hat{A} - \hat{A}|}_{= |\hat{L} \hat{R} - \hat{L} \hat{R}|} \\ &= |\hat{L} (\hat{R} - \hat{R})| + |(\hat{L} - \hat{L}) \hat{R}| \\ &= \underbrace{|\hat{L}| |\hat{R} - \hat{R}|}_{\leq n |\hat{R}| \varepsilon_M} + \underbrace{|\hat{L} - \hat{L}| |\hat{R}|}_{\leq n |\hat{L}| \varepsilon_M} \end{aligned}$$

$$\leq n |\hat{L}| \varepsilon_M (2 |\hat{R}| + |\hat{R}|)$$

$$\leq 3n |\hat{L}| |\hat{R}| \varepsilon_M, \quad \text{da} \quad |\hat{R} - \hat{R}| \leq n |\hat{R}| \varepsilon_M \Rightarrow |\hat{R}| = |\hat{R}|$$

2. (D/H Aufgabe 2.20)

Die Spaltenumformungen führen auf folgende Matrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ -1 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A_0} \xrightarrow[\text{zu jeder anderen Zeile}]{\text{Addition der ersten}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=: A_1}$$

Nach j Schritten bezeichnen wir die rechte untere Teilmatrix der Größe $(n-j) \times (n-j)$ durch A_j . Durch Induktion sieht man sofort, dass

$$A_j = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 2^j \\ -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ -1 & & & -1 & 2^j \end{pmatrix}}_{n-j-1 \text{ Spalten}}$$

(Für den Induktionsschritt addiere man wieder die erste Zeile zu jeder anderen!)

$$\Rightarrow A_{n-1} = (2^{n-1}) \in \text{Mat}_{1 \times 1}(\mathbb{R})$$

Damit ist das maximale Pivotelement $|\alpha_{\max}| = 2^{n-1}$.

3. " $\Rightarrow$ ": Sei x die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\|b - Ax\| = \min$.

Dann gilt die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums für die Funktion

$$f(x) = \|b - Ax\|^2 = (b - Ax)^T (b - Ax),$$

d.h.

$$\begin{aligned} 0 = \delta f &= (-A \delta x)^T (b - Ax) + (b - Ax)^T (-A \delta x) \\ &= -2 \delta x^T A^T (b - Ax) \end{aligned}$$

Da $\delta x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, muss bereits gelten

$$A^T(b - Ax) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A}Ax = A^Tb$$

" $\Leftarrow$ ": Sei $A^T Ax = A^T b$ und $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|b - Ay\|^2 - \|b - Ax\|^2 &= \cancel{b^T b} - b^T Ay - y^T A^T b + y^T A^T A y - \underbrace{b^T(b - Ax)}_{=\cancel{b^T b} - b^T Ax} + \underbrace{x^T A^T(b - Ax)}_{=0} \\ &= -2y^T \underbrace{A^T b}_{=A^T Ax} + x^T \underbrace{A^T b}_{=A^T Ax} + y^T A^T A y \end{aligned}$$

$$= -2y^T \underbrace{A^T b}_{=A^T Ax} + x^T \underbrace{A^T b}_{=A^T Ax} + y^T A^T A y$$

$$= \|A(x - y)\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(y) \geq f(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Bem. Ist $A^T A$ invertierbar, kann man auch so argumentieren: In diesem Fall gilt $\text{Ker } A = \{0\}$, daher $f(x) \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$. Somit muss ein globales Minimum existieren. Da in diesem Fall das eindeutig bestimmte x der einzige Kandidat für ein Extremum ist, gilt schon, dass das Minimum am Punkt x angenommen wird.

4. " $\Rightarrow$ ": Sei $(\bar{x}, x)^T$ eine Lösung von

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{x} + Ax = b}_{\bar{x} = b - Ax} \quad \text{und} \quad A^T \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow A^T(b - Ax) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^T Ax = A^T b$$

" $\Leftarrow$ ": Sei x eine Lösung von $A^T Ax = A^T b$.

Setze $\bar{x} = b - Ax$. Dann gilt $\bar{x} + Ax = b$ und $A^T \bar{x} = A^T(b - Ax) = 0$.

5. Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\text{rang } A = n$, $Q \in \mathcal{O}(n)$ mit

$$Q^T A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ rechte obere Dreiecksmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|b - Ax\|^2 &= \|Q^T(b - Ax)\|^2 \\ &= \|Q^T b - \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} x\|^2 \\ &= \underbrace{\|Q_{1,\dots,n}^T b - Rx\|^2}_{\text{Zeilen } 1,\dots,n \text{ von } Q^T} + \underbrace{\|Q_{n+1,\dots,n}^T b\|^2}_{\text{Zeilen } n+1,\dots,n \text{ von } Q^T} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist minimal gdw. $Q_{1,\dots,n}^T b - Rx = 0$, d.h.

$$x = R^{-1} Q_{1,\dots,n}^T b$$