

Wissenschaftliches Rechnen – Übungsaufgaben

Sommersemester 2025

26.05.2025 & 02.06.2025

1. Betrachten Sie die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x + q = 0$$

mittels der „ p - q -Formel“. Eine der Lösungen als Funktion des Parameters q ist gegeben durch

$$f(q) = 1 - \sqrt{1 - q}.$$

- (a) Berechnen Sie absolute und relative Konditionszahl dieser Lösungsformel.
- (b) Die Lösungsformel wird nun in Fließkommaarithmetik berechnet. Bestimmen Sie den Stabilitätsindikator. Schließen Sie, dass die Lösungsformel für solche q numerisch instabil ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die äquivalente Lösungsformel

$$g(q) = \frac{q}{1 + \sqrt{1 - q}}$$

numerisch stabil ist.

- 2. Deuffhard/Hohmann, Aufgabe 2.11.
- 3. Deuffhard/Hohmann, Aufgabe 2.16. Zur Vereinfachung dürfen Sie annehmen, dass der Stichprobenmittelwert exakt berechnet wurde.
- 4. (Nach Deuffhard/Hohmann, Aufgabe 2.18.) Gegeben Sei die Matrix

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

und die beiden rechten Seiten

$$b_1 = (1, 1)^T \quad \text{und} \quad b_2 = (-1, 1)^T.$$

Berechnen Sie:

- (a) Die normweise Kondition κ_∞ bezüglich der ∞ -Norm.
(b) Die Skeelsche Kondition

$$\kappa_C(A) = \| |A^{-1}| |A| \|_\infty,$$

wobei $|A|$ den *elementweisen* Absolutwert einer Matrix bezeichnet, $|A^{-1}| |A|$ also wiederum eine Matrix ist, die bezüglich der Zeilensummennorm abzuschätzen ist.

- (c) Betrachten Sie die Lösungsabbildungen

$$\varepsilon \mapsto A_\varepsilon^{-1} b_i$$

$b = 1, 2$, und berechnen Sie absolute und relative Kondition bezüglich Störungen in ε .