

Wissenschaftliches Rechnen – Übungsaufgaben

Sommersemester 2025

19.05.2025

1. Sei $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf $X = \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_Y$ eine Norm auf $Y = \mathbb{R}^m$. Die zugeordnete Matrixnorm (oder Operatornorm) einer Matrix $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (*)$$

- (a) Überprüfen Sie, dass (*) wirklich eine Norm definiert.
(b) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm die kleinste reelle Zahl c ist, so dass

$$\|Ax\|_Y \leq c \|x\|_X$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Deuffhard/Hohmann, Aufgabe 2.8

3. (a) Zeige, dass die Matrix-2-Norm einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ gegeben ist durch den größten Singulärwert von, d.h.

$$\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i},$$

wobei $\{\lambda_i\}$ die (immer nicht-negativen) Eigenwerte von $A^T A$ sind. Man spricht daher auch von der „Spektralnorm“.

- (b) Zeige am Beispiel, dass $\|A\|_2$ im Allgemeinen nicht mit den Eigenwerten von A selbst zusammenhängt.