

Übungsblatt 3 - Lösungen

1. (a) $\|\cdot\|$ ist pos. def.: $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq 0 \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \geq 0$

Sei nun $A \neq 0 \Rightarrow \exists x \neq 0: Ax \neq 0 \Rightarrow \|Ax\|_Y \neq 0 \Rightarrow \|A\| \geq \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \neq 0$

$\|\cdot\|$ ist homogen: $\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_Y}{\|x\|_X} \stackrel{\text{Da } \|\cdot\|_Y \text{ eine Norm ist}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda| \|A\|$

$\|\cdot\|$ ist Dreiecksungleichung:

$$\|A+B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}}_{= \|A\|} + \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X}}_{= \|B\|}$$

(b) $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow c \leq \|A\|$

$$\|Ax\| \leq c \|x\| \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{= \|A\|} \leq c$$

2. (D/H Aufgabe 2.8)

Bem.: $\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$, das Supremum ist ein Maximum, da $\{x: \|x\|_p=1\}$ kompakt.

(a) $\|A\|_1 \geq \max_{x=\pm e_j} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

andererseits:

$$\|Ax\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \underbrace{\sum_{j=1}^m |x_j|}_{= \|x\|_1}$$

$$\Rightarrow \|A\|_1 \leq \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(b) $\|A\|_\infty \geq \max_{x=(\pm 1, \dots, \pm 1)} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

andereits:

$$\|Ax\|_{\infty} \leq \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \underbrace{\max_j |x_j|}_{=\|x\|_{\infty}}$$

$$\Rightarrow \|A\|_{\infty} \leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(c) $\|A\|_2^2 = \max_i \lambda_i$ wobei $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte von $A^T A$ sind, siehe Aufgabe 3, mit $\lambda_i \geq 0$

Sei u ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \max_i \lambda_i$, o.B.d.A. $\|u\|_{\infty} = 1$

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \|\lambda u\|_{\infty} = \|A^T A u\|_{\infty} \leq \sup_{\|x\|_{\infty}=1} \|A^T A u\|_{\infty} = \|A^T A\|_{\infty} \stackrel{(d)}{\leq} \|A^T\|_{\infty} \|A\|_{\infty} = \|A\|_1 \text{ nach (e) \& (b)}$$

(d) $\|AB\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|ABx\|_p \stackrel{\text{Aufgabe 1(b)}}{\leq} \sup_{\|x\|_p=1} \|A\|_p \|Bx\|_p = \|A\|_p \|B\|_p$

3. (a) $\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|_2=1} x^T A^T A x$

Da $A^T A$ symmetrisch, gibt es ein orthogonales S , sodass $A^T A = S D S^T$ mit D diagonal

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2=1} x^T S D S^T x = \sup_{\|y\|_2=1} y^T D y \quad \text{mit } y = S^T x$$

$y^T D y$ ist offensichtlich maximal mit $\|y\|_2=1$ wenn y ein Eigenvektor zum größten Eigenwert von $A^T A$ ist.

Da $A^T A$ pos. semi-definit ist, sind alle Eigenwerte nicht-negativ.

$$\Rightarrow \|A\|_2^2 = \max_i \lambda_i, \quad \lambda_i \text{ Eigenwert von } A^T A.$$

(b)

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat Eigenwert 0 (mit algebraischer Vielfachheit 2)}$$

$$A_{\alpha}^T A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A_{\alpha}\|_2 = \alpha \quad \text{kann hingegen beliebig groß sein.}$$