

Wissenschaftliches Rechnen – Übungsaufgaben

Sommersemester 2025

12.05.2025

1. Lesen Sie Abschnitt 1.4 im Deuffhard/Hohmann aufmerksam. Beantworten Sie dabei schriftlich die folgenden Fragen:

(a) Zeigen Sie, der Notation im Deuffhard/Hohmann folgend, dass

$$L_1 A^{(1)} L_1^T = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie explizit, dass $L_1 A^{(1)} L_1^T$ auch wieder symmetrisch positiv definit ist, ohne Verwendung des Sylvester'schen Trägheitssatzes.

(c) Schreiben Sie den Beweis von Satz 1.11 im Detail auf.

(d) Schreiben Sie die Herleitung des Algorithmus auf Seite 17 in Blockmatrixschreibweise auf, um die Struktur des Argumentes noch klarer darzustellen.

2. (Nach Deuffhard/Hohmann Aufgabe 1.7.)

(a) Die reelle Matrix

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

sei symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, dass

$$b^2 < a c.$$

(b) Folgern Sie, dass

$$|b| < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}.$$

(c) Sei nun $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie, dass jede Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$$

symmetrisch positiv definit ist.

(d) Folgern Sie schließlich, dass

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii} .$$

(e) Was bedeutet dieses Resultat für die Suche nach Pivotelementen?

3. Deuffhard/Hohmann Aufgabe 1.8