

Übungsblatt 2 - Lösungen

1. (a) Da A eine SPD-Matrix ist, können wir schreiben

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & v^T \\ v & C \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{11} > 0$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \ell & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} + \cancel{0^T v} & \cancel{1 v^T} + \cancel{0^T C} \\ a_{11} \ell + v & \ell v^T + C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & v^T \\ a_{11} \ell + v & \ell v^T + C \end{pmatrix}$$

Wir verlangen, dass $a_{11} \ell + v = 0 \Rightarrow \ell = -\frac{1}{a_{11}} v$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_1 A^{(1)} L_1^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & v^T \\ 0 & C - \frac{1}{a_{11}} v v^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}} v^T \\ & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \underbrace{-a_{11} \frac{1}{a_{11}} v^T + v^T}_{=0} \\ 0 & \underbrace{C - \frac{1}{a_{11}} v v^T}_{=: B^{(2)}} \end{pmatrix} \quad (*) \end{aligned}$$

(b) Aus der obigen Darstellung folgt:

$$B^{(2)T} = \underbrace{C^T}_{=C, \text{ da } A^{(1)} \text{ symmetrisch}} - \frac{1}{a_{11}} (v v^T)^T = C - \frac{1}{a_{11}} v^T v^T = B^{(2)}$$

Also ist nach (*) auch $L_1 A^{(1)} L_1^T$ symmetrisch.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ beliebig gewählt. Dann ist

$$x^T (L_1 A^{(1)} L_1^T) x = y^T A^{(1)} y \quad \text{mit } y = L_1^T x.$$

Da L_1 nach Konstruktion nicht-singulär ist, gilt $y \neq 0$.

Da A pos. def. folgt sofort $y^T A^{(1)} y > 0$.

(c) Durch Induktion:

$$\text{Sei } L_j \dots L_1 A^{(1)} L_1^T \dots L_j^T = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{jj}^{(j+1)} \\ & & & B^{(j+1)} \end{pmatrix} \quad \text{SPD für ein } j \geq 1.$$

Eine direkte Anwendung von (a) und (b) auf $B^{(j+1)}$ führt auf eine Zerlegung

$$\tilde{L}_{j+1} B^{(j+1)} \tilde{L}_{j+1}^T = \begin{pmatrix} b_{11}^{(j+1)} & & 0^T \\ & \ddots & \\ 0 & & B^{(j+2)} \end{pmatrix},$$

wiederrum SPD, so dass

$$L_{j+1} \dots L_1 A^{(1)} L_1^T \dots L_{j+1}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{jj}^{(j+1)} \\ & & & B^{(j+2)} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } L_{j+1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{L}_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Nach $n-1$ Schritten gilt

$$L_{n-1} \dots L_1 A^{(1)} L_1^T \dots L_{n-1}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} =: D$$

Da D SPD ist, sind alle Diagonalelemente strikt positiv.

$L = L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$ ist unipotent, da unipotente untere Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, und es gilt

$$A^{(1)} = L D L^T$$

(d) Wir verlangen

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & 0^T \\ & \ddots & \\ l_{1j} & & L^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & & l_{1j}^T \\ & \ddots & \\ 0 & & L^{(2)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j}^T \\ & \ddots & \\ a_{1j} & & A^{(2)} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt der Vergleich der Blockkomponenten:

$$\begin{aligned} \ell_{11}^2 &= a_{11} & \ell_{11} \ell_1^T &= a_1^T \\ \ell_{11} \ell_1 &= a_1 & \ell_1 \ell_1^T + L^{(2)} L^{(2)T} &= A^{(2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\ell_1 = \frac{1}{\ell_{11}} a_1$$

$$L^{(2)} L^{(2)T} = A^{(2)} - \ell_1 \ell_1^T =: B^{(2)}$$

Dieser Prozess lässt sich wieder induktiv fortsetzen, wobei die im Buch beschriebenen Formeln auftreten.

2(a) Lösung 1: S pos. definit $\Rightarrow \det(S) > 0$ (aus der linearen Algebra)
 $\Rightarrow ac - b^2 > 0$

Lösung 2: Sei WLOG $a > c$. Es muss gelten: Für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} > 0$$

Wir berechnen das Minimum von $f(t) = at^2 + 2bt + c$

$$f'(t) = 2at + 2b \quad \text{ist Null für } t = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow f_{\min} = a \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \frac{b^2}{a} + c = -\frac{b^2}{a} + c > 0 \quad \Rightarrow ac > b^2$$

$$(b) \quad (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{c} + c \geq 0 \quad \Rightarrow \sqrt{ac} \leq \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$$

Also, mit (a): $b < \sqrt{ac} \leq \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$.

$$(c) \quad \text{Wir testen } A \text{ mit } x_{ij}^T := (0 \dots 0 \underset{\uparrow}{y_1} 0 \dots 0 \underset{\uparrow}{y_2} 0 \dots 0) \quad \text{mit } x_{ij}^T \neq 0$$

$$\text{Dann gilt } 0 < x_{ij}^T A x_{ij} = y^T S_{ij} y \quad (*)$$

mit $S_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$

A symm. $\Rightarrow S_{ij}$ symm.

Wegen (*) ist S_{ij} pos. def.

(d) Sei $i \neq j$:

Wegen (b), (c) gilt $|a_{ij}| < \frac{a_{ii}}{2} + \frac{a_{jj}}{2} \leq \max_i a_{ii}$

Bilden wir das Maximum über alle i, j (ohne Beschränkung auf $i \neq j$):

$$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$$

3. (D/H Aufgabe 1.8)

(a) Wir testen: $\left(I - \frac{uv^T}{1+v^T u}\right) \left(I + uv^T\right) = I - \frac{uv^T}{1+v^T u} + uv^T - \frac{u(v^T u)v^T}{1+v^T u}$

$$= I + \frac{uv^T}{1+v^T u} \underbrace{\left[-1 + (1+v^T u) - v^T u\right]}_{=0}$$

$$= I$$

ist skalar und kann
herausfaktoriert
werden

(b) Sei $U^T v = -1$

$$\Rightarrow (I + uv^T)u = u + u(v^T u) = 0$$

$$\Rightarrow \dim \ker(I + uv^T) > 0$$

$$\Rightarrow I + uv^T \text{ nicht invertierbar.}$$