

Lösungen zu Aufgabenblatt 1

1. " $\Rightarrow$ ": Sei $b \in \text{Im } A \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ so dass $b = Ax$

Wähle nun $y \in \text{Ker } A^T$, also $A^T y = 0$

$$\Rightarrow b^T y = (Ax)^T y = x^T (A^T y) = 0$$

$$\Rightarrow b \perp y$$

Da $y \in \text{Ker } A^T$ beliebig, gilt $b \perp \text{Ker } A^T$

" $\Leftarrow$ ": Durch Widerspruch. Sei $b \notin \text{Im } A$

Dann kann man schreiben $b = Ax + y$ mit $y \neq 0$, $y \in (\text{Im } A)^\perp$

$$\Rightarrow y^T A v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow (A^T y)^T v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow y \in \text{Ker } A^T$$

$$\Rightarrow b^T y = x^T \underbrace{A^T y}_{=0} + y^T y = \|y\|^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow b \notin \text{Ker } A^T \quad \downarrow$$

2 (a) Schreibe

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ -l_{k-1} \\ \vdots \\ -l_n \\ 1 \end{array}}_{=: \tilde{L}_k} \end{array} \right)$$

$$L_k^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ l_{k-1} \\ \vdots \\ l_n \\ 1 \end{array}}_{=: \tilde{L}_k^{-1}} \end{array} \right)$$

Um zu zeigen, dass L_k^{-1} wirklich die inverse von L_k ist, rechnen wir

$$L_k L_k^{-1} = \begin{pmatrix} I_{k-1} I_{k-1} + 0 \cdot 0 & I_{k-1} 0 + 0 \cdot \tilde{L}_k^{-1} \\ 0 \cdot I_{k-1} + \tilde{L}_k 0 & 0 \cdot 0 + \tilde{L}_k \tilde{L}_k^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{L}_k \tilde{L}_k^{-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{L}_k \tilde{L}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ -\ell & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sigma^T \\ \ell & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \sigma^T \ell & 1 \cdot \sigma + \sigma^T I \\ -\ell \cdot 1 + I \ell & -\ell \cdot \sigma + I \cdot I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma^T \\ 0 & I \end{pmatrix} = I_{n_k+1}$$

$$\Rightarrow L_k \bar{L}_k = I_n$$

(b) Siehe Lösung von Kilian Freytag.

Alternativ kann man den Induktionsschritt auch über eine Blockmatrixzerlegung aufbauen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sigma^T \\ \ell & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sigma^T \\ 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \sigma^T 0 & 1 \cdot \sigma^T + \sigma^T \tilde{L} \\ \ell \cdot 1 + I \cdot 0 & \ell \cdot \sigma^T + I \tilde{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma^T \\ \ell & \tilde{L} \end{pmatrix}$$

Die vollständige Induktion dann wie in der anderen Version.

3. (D/H Aufgabe 1.1):

$$\text{z.B.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (D/H Aufgabe 1.2):

(a) Es ist jeweils zu zeigen, dass Produkt und Inverse in der gleichen Klasse liegen.

1. Fall: unipotente l. unt. Dreiecksmatrizen:

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{=0} + \underbrace{a_{ii}}_{=1} \underbrace{b_{ii}}_{=1} + \sum_{k=i+1}^n a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{=0} = 1$$

$$j > i: (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow AB$ ist l. unt. Dreiecksmatrix, unipotent

Die Existenz der Inversen in der gleichen Klasse ergibt sich direkt aus Aufgabe 2

2. Fall: allgemeine unte. Dreiecksmatrizen A , nichtsingulär

$\begin{matrix} \text{Zeilenzerlegung} & & \text{Spaltenzerlegung} \\ \downarrow & \leftarrow & \downarrow \end{matrix}$

Schreibe $A = D_A L_A = \tilde{L}_A D_A$, $L_A, \tilde{L}_A$ unipotent, D_A diagonal, nichtsing.

$\Rightarrow A^{-1} = L_A^{-1} D_A^{-1}$ ist wieder eine unte. Dreiecksmatrix

Schreibe $B = D_B L_B = \tilde{L}_B D_B$ wie oben

$\Rightarrow AB = D_A \underbrace{L_A \tilde{L}_B}_{\text{unipot. unte. Dreiecksmatrix}} D_B$ ist wieder Dreiecksmatrix, nichtsingulär

Die weiteren Fälle ergeben sich durch Transposition.

(b) $A = LR$ L unte. Dreiecksmatrix, unipotent
 R ob. Dreiecksmatrix, nichtsingulär

Sei $A = \tilde{L} \tilde{R}$ eine weitere solche Zerlegung. Also:

$$LR = \tilde{L} \tilde{R} \Rightarrow \underbrace{\tilde{L}^{-1} L}_{\substack{\uparrow \\ \text{unipot. li. unt. Dreiecksmatrix}}} = \underbrace{\tilde{R} \tilde{R}^{-1}}_{\text{nichtsing. ob. rechte Dreiecksmatrix}}$$

Das geht nur, wenn $\tilde{L}^{-1} L = I = \tilde{R} \tilde{R}^{-1}$, also $L = \tilde{L}$, $R = \tilde{R}$.

(c) Sei $A = LR$, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & u^T \\ v & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ l & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r^T \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot r_{11} + 0^T 0 & 1 \cdot r^T + 0^T \tilde{R} \\ l r_{11} + \tilde{L} \cdot 0 & l r^T + \tilde{L} \tilde{R} \end{pmatrix}$$

Durch Koeffizientenvergleich:

① $a_{11} = r_{11}$,

② $u^T = r^T$

③ $v = l r_{11} \Rightarrow l = \frac{1}{a_{11}} v$,

④ $\tilde{L} \tilde{R} = B - l r^T = B - \frac{1}{a_{11}} v u^T =: \tilde{A}$

D.h. der Schritt, mit dem das Problem der n -dimensionalen LR-Zerlegung auf eine $(n-1)$ -dimensionale LR-Zerlegung (nämlich der Zerlegung von $\tilde{L} \tilde{R}$) reduziert, ist in allen Parametern durch ①-④ eindeutig bestimmt.

Wir können also rekursiv vorgehen. In Dimension 1 ist dann $\tilde{L}=1$ und $\tilde{R}=\tilde{A}$ trivial eindeutig bestimmt.

5. (D/H Aufgabe 1.3): $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ strikt diagonaldominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{für } i=1, \dots, n.$$

Zeige: A^T strikt diagonaldominant $\Rightarrow$ LR-Zerlegung durchführbar und A invertierbar.

Wir verwenden den Induktionsschritt aus Aufgabe 1.2(b) in obiger Notation und zeigen zunächst Folgendes:

$$A^T \text{ strikt diagonaldominant} \Rightarrow \tilde{A}^T = \left(B - \frac{1}{a_{11}} v u^T\right)^T \text{ strikt diagonaldominant}$$

Beweis: A^T strikt diagonal dominant bedeutet:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=2}^n |a_{ji}| \geq 0 \quad (\text{Fall } i=1) \quad (*)$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| + |a_{ii}| \quad (\text{Fall } i \geq 2) \quad (**)$$

Aus (*) folgt:

$$1 > \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{ji}}{a_{ii}} \right| \Rightarrow |a_{ii}| \geq \sum_{j=2}^n \left| \frac{a_{ji} a_{ii}}{a_{ii}} \right| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ji} a_{ii}}{a_{ii}} \right| + \left| \frac{a_{ii} a_{ii}}{a_{ii}} \right|$$

Setze in (**) ein:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ji} a_{ii}}{a_{ii}} \right| + \left| \frac{a_{ii} a_{ii}}{a_{ii}} \right|$$

$$\Rightarrow |a_{ii}| - \left| \frac{a_{ii} a_{ii}}{a_{ii}} \right| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left(|a_{ji}| + \left| \frac{a_{ji} a_{ii}}{a_{ii}} \right| \right)$$

Da $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $|a| + |b| \geq |a - b|$ (Dreiecksungleichungen):

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{ii} a_{ii}}{a_{ii}} \right| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ji} - \frac{a_{ji} a_{ii}}{a_{ii}} \right| \quad (***)$$

Wegen $\tilde{A} = B - \frac{1}{a_{ii}} v v^T$ mit $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{ii} & v^T \\ \hline v & B \end{array} \right)$

gilt: die Elemente von $\tilde{A}$ sind

$$(\tilde{A})_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ii} a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{für } ij = 2, \dots, n$$

Damit ist (***) gleichbedeutend mit strikter Diagonaldominanz von $\tilde{A}$,

was zu zeigen war.

Rekursives Anwenden dieses Reduktionsschrittes zeigt, dass die strikte Diagonaldominanz der transponierten Matrix erhalten bleibt. Die LR-Zerlegung bleibt damit durchführbar (ohne Pivotierung) und es gilt $\tau_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Da

$$\det A = \tau_{11} \cdot \tau_{22} \cdots \tau_{nn} > 0,$$

Ist A invertierbar.

Wissenschaftliches Rechnen Übungsaufgabenblatt 1: Aufgabe 2b

Für ein festes n und ein k mit $2 \leq k \leq n$ sei $M_{k-1} :=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & l_{k,k-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,k-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es soll die Induktionshypothese $M_{k-1} = L_1^{-1} \cdot \dots \cdot L_{k-1}^{-1}$ gezeigt werden.

Für $k = 2$ ist dies der Fall, da $L_{2-1}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{1,2-1} & \ddots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ l_{n,2-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{2-1}$$

Induktionsschritt:

$$L_1^{-1} \cdot \dots \cdot L_k^{-1} = (L_1^{-1} \cdot \dots \cdot L_{k-1}^{-1}) \cdot L_k^{-1} = M_{k-1} \cdot L_k^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & l_{k,k-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,k-1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & l_{k+1,k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{n,k} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (Id_n + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & l_{k,k-1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,k-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{=:A}) \cdot (Id_n + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & l_{k+1,k} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & l_{n,k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{=:B}) =$$

$$= Id_n + A + B + A \cdot B = M_k + A \cdot B$$

Jede Zeile von A hat ab der k -ten Stelle nur Nullen als Einträge und jede Spalte von B bis zur $(k-1)$ -ten nur Nullen. Folglich gilt $A \cdot B = 0$ und somit auch $L_1^{-1} \cdot \dots \cdot L_k^{-1} = M_k + A \cdot B = M_k + 0 = M_k$

Folglich gilt auch $L_1^{-1} \cdot \dots \cdot L_{n-1}^{-1} = M_{n-1}$, was zu zeigen war.