Quantitative Methoden

Probeklausur

11.07.2022

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

1. Betrachten Sie die allgemeine lineare Differenzengleichung erster Ordnung,

$$y_{n+1} = a\,y_n + b\,.$$

   (a) Wie lautet die Lösung dieser Differenzengleichung mit Anfangswert y_0?
   Hinweis: Die geometrische Summenformel lautet, für $q \neq 1$,

$$q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,. \qquad (*)$$

   (b) Unter welchen Voraussetzungen ist die Lösung unbeschränkt für $n \to \infty$?

   (c) Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Lösung für $n \to \infty$?

   (d) Wenn $y_n \to y_*$ für $n \to \infty$, wie lautet y_*?

(5+5+5+5)

(a) $y_1 = a y_0 + b$

$y_2 = a(a y_0 + b) + b = a^2 y_0 + ab + b$

$y_3 = a(a^2 y_0 + ab + b) = a^3 y_0 + a^2 b + ab + b$

$\vdots$

$y_n = a^n y_0 + b\underbrace{(1 + a + \dots + a^{n-1})}_{\overset{(*)}{=} \frac{a^n - 1}{a-1} \text{ für } a \neq 1} = a^n\left(y_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}$ für $a \neq 1$

Falls $a = 1$: $y_n = y_0 + b \cdot n$

(b) Wenn $|a| > 1$ und $y_0 + \frac{b}{a-1} \neq 0$

oder $a = 1$.

(c) $|a| < 1$ oder $y_0 + \frac{b}{a-1} = 0$

(d) Es muss gelten: $y_* = a y_* + b \Rightarrow y_* - a y_* = b$

$\Rightarrow y_* = \frac{b}{1-a}$

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{t^2}{y^2(t)}\,,$$
$$y(0) = 1\,.$$

(10)

Diese Gleichung ist trennbar. Also:

$$\int y^2\,dy = \int t^2\,dt + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Mit $y(0) = 1$: $\frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}0^3 + C \Rightarrow \frac{1}{3} = C$

$$\Rightarrow y^3 = t^3 + 1$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt[3]{t^3+1} \quad \text{oder} \quad y(t) = \left(t^3+1\right)^{\frac{1}{3}}$$

3. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2\,y = \mathrm{e}^{-x}\,,$$
$$y(0) = 0\,,$$
$$y'(0) = 0\,.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zur *homogenen* Gleichung.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung zur *inhomogenen* Gleichung.

(c) Lösen Sie die Gleichung mit den gegebenen Anfangsdaten.

(d) Wie verhält sich die Lösung wenn $x \to \infty$?

(5+5+5)

(a) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_+ = 1, \quad \lambda_- = -2$$

Damit ist die allgemeine Lösung der hom. Gleichung

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_+ x} + c_2 e^{\lambda_- x} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$$

(b) Störgliedansatz: $y(x) = c\, e^{-x}$

$$\Rightarrow y'(x) = -c\,e^{-x}, \quad y''(t) = c\,e^{-x}$$

In Gleichung eingesetzt:

$$c\,e^{-x} + (-c\,e^{-x}) - 2c\,e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow -2c = 1 \Rightarrow c = -\tfrac{1}{2}$$

Partikularlösung ist also (z.B.) $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$

(c) Allgem. Lösung: $y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-2x}$

Mit $y(0)=0$: $0 = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2$

$y'(0)=0$: $0 = \frac{1}{2} + c_1 - 2c_2$

$\Big\}\; 0 = -1 + 3c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow y = -\tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{1}{6}e^{x} + \tfrac{1}{3}e^{-2x}$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ weil $e^{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, $e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, $e^{-2x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

4. Eine Möbelfabrik stellt Stühle und Tische her. Jeder Tisch benötigt 4 Stunden in der Tischlerei und 2 Stunden beim Lackieren. Jeder Stuhl benötigt 3 Stunden in der Tischlerei und 1 Stunde beim Lackieren. In der kommenden Woche stehen 240 Arbeitsstunden in der Tischlerei und 100 Arbeitsstunden in der Lackierei zur Verfügung. Ein Tisch wirft einen Profit von 7 EUR ab, jeder Stuhl einen Profit von 5 EUR.

   Wie viele Stühle und Tische sollten in dieser Woche gefertigt werden, so dass der Profit maximal wird? Lösen Sie dieses Problem mit der grafischen Methode. (10)

Maximiere $z = 7x + 5y$

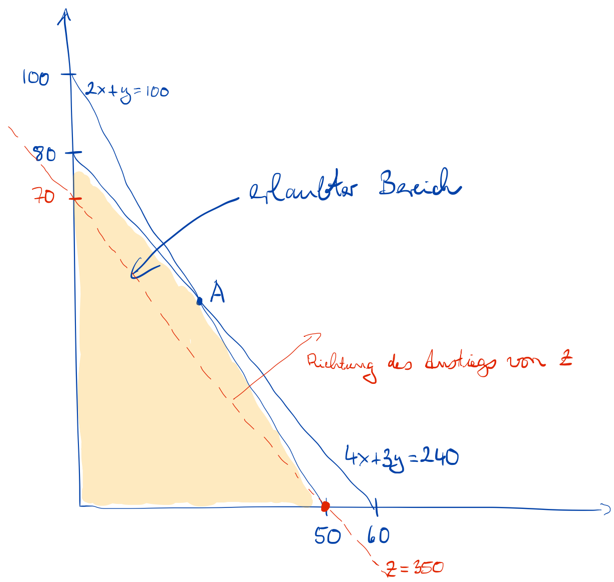
x: Anzahl Tische

y: Anzahl Stühle

unter den N.B. $4x + 3y \leq 240$

$2x + y \leq 100$

$x, y \geq 0$



Nach der Grafik liegt das Maximum von z im Punkt A, also dem Schnittpunkt der beiden Geraden. Berechnung durch Gaußelimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 240 \\ 2 & 1 & 100 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 50 \\ 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 40 \end{array}\right)$$

Also sollten $x = 30$ Tische und $y = 40$ Stühle bei einem Gesamtprofit von

$$z = 7 \cdot 30 + 5 \cdot 40 = 210 + 200 = 410 \text{ EUR}$$

produziert werden.

5. Gegeben ist das Simplex-Tableau:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	0	1	0	0	10
1	2	−2	0	1	0	20
0	1	2	0	0	1	5
−1	1	−2	0	0	0	0

(a) Welches lineare Optimierungsproblem wird mit diesem Tableau gelöst? (Die Variablen s_1, s_2 und s_3 sind Schlupfvariablen und sollten in der Antwort nicht mehr vorkommen.)

(b) Lösen Sie dieses Optimierungsproblem mit der Simplexmethode.

(c) Formulieren Sie das duale Problem.

(d) Anhand ihrer Lösung zu (b) können Sie ablesen, welcher Schattenpreis 0 betragen muss, und welche duale Schlupfvariable für das duale Problem Basisvariable ist. Erklären Sie.

(5+10+5+5)

(a) Maximiere $z = x_1 - x_2 + 2x_3$

unter den N.B. $2x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20$

$x_2 + 2x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(b) • x_3 wird Basisvariable (−2 in letzter Zeile), Pivot in 3. Zeile.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	0	1	0	0	10
1	3	0	0	1	1	25
0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
−1	2	0	0	0	1	5

• x_1 wird Basisvariable (−1 in letzter Zeile, Pivot in 1. Zeile weil $\frac{10}{2} < \frac{25}{1}$)

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	5
0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	1	20
0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	10

• Da in der letzten Zeile keine negativen Einträge mehr sind, bricht das Verfahren ab.

Lösung: $x_1 = 5$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $s_2 = 20$ (Basisvariablen)

$x_2 = s_1 = s_3 = 0$ (Nicht-Basisvariablen)

$z = 10$

(c) Minimiere $z = 10y_1 + 20y_2 + 5y_3$

unter den NB: $2y_1 + y_2 \geq 1$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -1$

$-2y_2 + 2y_3 \geq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(d) Satz vom komplementären Schlupf:

Produktionsfaktor 2 hat Schlupf ($s_2 = 20$), also ist sein Schattenpreis $y_2 = 0$

Produkt 2 ist keine Basisvariable ($x_2 = 0$), also ist der duale Schlupf Basisvariable.

Das kann man rechnerisch austesten (nicht in der Aufgabe verlangt): Die dualen Basisvariablen sind y_1, y_3, t_2 und müssen lösen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$, $y_3 = -1$, $t_2 = \frac{5}{2}$ mit $z = \frac{10}{2} + 5 = 10$

Diese Lösung stimmt, wie erwartet, mit dem primalen Optimum überein.