

Quantitative Methoden

Abschlussklausur

01.08.2022

1. Betrachten Sie die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\begin{aligned}y'(x) &= a y(x) + b, \\y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

- (a) Lösen Sie die Differentialgleichung.¹
(b) Unter welchen Voraussetzungen ist die Lösung unbeschränkt für $x \rightarrow \infty$?
(c) Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Lösung für $x \rightarrow \infty$? Wie lautet der Grenzwert?

(5+5+5)

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}y'(x) &= e^x y(x)^2, \\y(0) &= 1.\end{aligned}$$

(10)

3. Ein Spezialfall des Multiplikator–Akzelerator-Modells nimmt folgende Beziehungen zwischen dem Volkseinkommen Y_n , dem Konsum C_n , den Investitionen I_n im Jahr n sowie den zeitunabhängigen Staatsausgaben S an:

$$\begin{aligned}Y_n &= C_n + I_n + S, \\C_n &= \frac{1}{2} Y_{n-1}, \\I_n &= b(C_n - C_{n-1}).\end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Modell durch folgende Differenzgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird:

$$Y_n - \frac{1+b}{2} Y_{n-1} + \frac{b}{2} Y_{n-2} = S.$$

¹Nur zur Kontrolle: die Lösung lautet, für den Fall $a \neq 0$,

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Verwenden Sie diese Information in Ihrer Antwort nicht.

- (b) Zeigen Sie, dass $Y_n = 2S$ eine spezielle Lösung der Differenzgleichung aus Teil (a) ist.
- (c) Setzen Sie $b = 3 - 2\sqrt{2}$ und geben Sie dann die allgemeine Lösung zur *homogenen* Differenzgleichung aus Teil (a) an.
- (d) *Extrapunkte:* Der Parameter b gibt an, wie stark Investitionen auf Änderungen des Konsumverhaltens reagieren. Die Zentralbank kann diesen Koeffizienten durch ihre Zinspolitik in gewissen Grenzen steuern. Warum wäre die Zielgröße $b = 3 - 2\sqrt{2}$ wie in Teil (c) für die Zentralbank eine gute Wahl?

(5+5+5+5)

4. Minimieren Sie

$$z = 8x + 12y$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 5x + 2y &\geq 20, \\ 4x + 3y &\geq 24, \\ y &\geq 2, \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

mit der grafischen Methode. (10)

5. Führen Sie einen Schritt der Simplexmethode durch und geben Sie an, ob das Verfahren nach diesem Schritt bereits abbricht, oder ob mindestens noch ein weiterer Schritt nötig ist.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	0	1	0	0	10
1	2	-2	0	1	0	20
0	1	2	0	0	1	5
-1	1	-2	0	0	0	0

(10)

6. Gegeben ist das Transportproblem mit 3 Angebotsorten mit den Angeboten

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 2$$

und 3 Nachfrageorten mit den Bedarfen

$$b_1 = 3, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 4$$

sowie die 3×3 -Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Woran sehen Sie, dass das Problem lösbar ist? Hat es ganzzahlige Lösungen?
- (b) Bestimmen Sie eine zulässige Lösung mit der Nordweststreckenregel.
- (c) Ein Kollege hat das duale Problem bereits gelöst und nennt Ihnen die optimale Zielfunktion des dualen Problems, $z = 11$. Zeigen Sie mit dieser Information, dass Ihre mit der Nordweststreckenregel bestimmte Startlösung nicht optimal sein kann.
- (d) Bekannt seien außerdem die optimalen Schattenpreise: Auf der Angebotsseite,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 0,$$

auf der Nachfrageseite

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 2.5.$$

Sie haben die Möglichkeit, eine Produktionseinheit von einem Angebotsort auf einen anderen Angebotsort zu verlagern. Von wo nach wo würden Sie verlagern, um die Transportkosten optimal zu senken? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5+5+5+5)