Quantitative Methoden

Abschlussklausur

01.08.2022

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

1. Betrachten Sie die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$y'(x) = a\,y(x) + b\,,$$
$$y(0) = y_0\,.$$

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung.[1]

(b) Unter welchen Voraussetzungen ist die Lösung unbeschränkt für $x \to \infty$?

(c) Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Lösung für $x \to \infty$? Wie lautet der Grenzwert?

(5+5+5)

(a) Methode 1: Integrierender Faktor

$y' - ay = b \qquad \Rightarrow$ Integrierender Faktor ist $M = e^{-ax}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-ax} y) = e^{-ax} b$

$\Rightarrow \quad e^{-ax} y(x) = \int e^{-ax} b \, dx + C = \frac{b}{-a} e^{-ax} + C \qquad \boxed{\text{falls } a \neq 0}$

$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{b}{a} + C\, e^{ax}$

Mit $y(0) = y_0$: $\quad y_0 = -\frac{b}{a} + C \Rightarrow C = y_0 + \frac{b}{a} \qquad \Rightarrow y(x) = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + y_0\right) e^{ax}$

Methode 2: Homogene Gleichung ist $y_H'(x) = a y_H(x) \Rightarrow y_H(x) = C\, e^{ax}$

Spezielle Inhomogene Lösung durch Störgliedansatz:

$y_I(x) = d \qquad \Rightarrow y_I'(x) = 0$

eingesetzt: $\quad 0 = ad + b \quad \Rightarrow d = -\frac{b}{a} \qquad \boxed{\text{falls } a \neq 0}$

Also ist die allgemeine Lösung von der Form $\quad y(x) = C\, e^{ax} - \frac{b}{a}$

Jetzt weiter wie bei Methode 1 ...

[1]Nur zur Kontrolle: die Lösung lautet, für den Fall $a \neq 0$:

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) \mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$$

Verwenden Sie diese Information in Ihrer Antwort nicht.

Wenn $a = 0$, $\quad y'(x) = b$

$\Rightarrow y(x) = bx + y_0$

(b) Unbeschränkt für $\quad a = 0,\ b \neq 0$

oder $a > 0, \quad y_0 \neq -\frac{b}{a}$

(c) In allen anderen Fällen, mit Grenzwert $-\frac{b}{a}$ wenn $a \neq 0$, $\ y_0$ wenn $a = 0$.

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = \mathrm{e}^x\, y(x)^2\,,$$
$$y(0) = 1\,.$$

(10)

Die Gleichung ist separabel, also:

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int e^x\, dx + C$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = e^x + C$$

Mit $y(0) = 1$: $\quad -1 = e^0 + C \quad \Rightarrow \quad C = -2$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = e^x - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 2 - e^x$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

Probe (nicht verlangt):

$$y'(x) = -e^x \frac{-1}{(2-e^x)^2} = e^x \frac{1}{(2-e^x)^2} = e^x \frac{1}{y^2(x)}$$

3. Ein Spezialfall des Multiplikator–Akzelerator-Modells nimmt folgende Beziehungen zwischen dem Volkseinkommen Y_n, dem Konsum C_n, den Investitionen I_n im Jahr n sowie den zeitunabhängigen Staatsausgaben S an:

$$Y_n = C_n + I_n + S\,, \qquad (1)$$
$$C_n = \tfrac{1}{2}\,Y_{n-1}\,, \qquad (2)$$
$$I_n = b\,(C_n - C_{n-1})\,. \qquad (3)$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Modell durch folgende Differenzengleichung zweiter Ordnung beschrieben wird:

$$Y_n - \frac{1+b}{2}\,Y_{n-1} + \frac{b}{2}\,Y_{n-2} = S\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass $Y_n = 2S$ eine spezielle Lösung der Differenzengleichung aus Teil (a) ist.

(c) Setzen Sie $b = 3 - 2\sqrt{2}$ und geben Sie dann die allgemeine Lösung zur *homogenen* Differenzengleichung aus Teil (a) an.

(d) *Extrapunkte:* Der Parameter b gibt an, wie stark Investitionen auf Änderungen des Konsumverhaltens reagieren. Die Zentralbank kann diesen Koeffizienten durch ihre Zinspolitik in gewissen Grenzen steuern. Warum wäre die Zielgröße $b = 3 - 2\sqrt{2}$ wie in Teil (c) für die Zentralbank eine gute Wahl?

(5+5+5+5)

(a) Setze (2) in (1) und (3) ein:

$$Y_n = \frac{1}{2}\,Y_{n-1} + I_n + S \qquad (1^*)$$
$$I_n = b\left(\frac{1}{2}\,Y_{n-1} - \frac{1}{2}\,Y_{n-2}\right) \qquad (2^*)$$

Jetzt (2^*) in (1^*) einsetzen:

$$Y_n = \frac{1}{2}\,Y_{n-1} + \frac{1}{2}\,b\,Y_{n-1} - \frac{1}{2}\,b\,Y_{n-2} + S$$

Durch Umstellen erhält man die gesuchte Gleichung.

(b) Da $2S$ nicht von n abhängt, erhalten wir durch Einsetzen

$$2S - \frac{1+\cancel{b}}{2}\,2S + \cancel{\frac{b}{2}\,2S} = S$$

Diese Gleichung ist offensichtlich für alle S erfüllt.

(c) $$\underline{Y}_n - \underbrace{\frac{1+3-2\sqrt{2}}{2}}_{=2-\sqrt{2}} \underline{Y}_{n-1} + \underbrace{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}_{=\frac{3}{2}-\sqrt{2}} \underline{Y}_{n-2} = 0 \qquad \text{(hom. Gleichung!)}$$

Also lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - (2-\sqrt{2})\lambda + \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0$$

Mit p-q-Formel: $$\lambda_\pm = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + \sqrt{2}}_{= 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{4} - \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 0 \ \overset{!}{=}\ 0}}$$

Also hat die charakteristische Gleichung nur eine Lösung, $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist daher

$$\underline{Y}_n = C_1 \lambda^n + C_2\, n\, \lambda^n \qquad \text{mit } \lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(d) $\lambda \approx 0{,}3 < 1$, damit ist die Dynamik stark gedämpft und wird schnell gegen den asymptotischen Wert 25 (inh. Lösung) konvergieren, der damit ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Weil die charakteristische Gleichung nur eine Lösung hat, ist dies genau der Fall der kritischen Dämpfung. In diesem Fall ist die Konvergenz gegen das Gleichgewicht am schnellsten, und ohne Schwingungen (hier Boom-Bust-Zyklen).

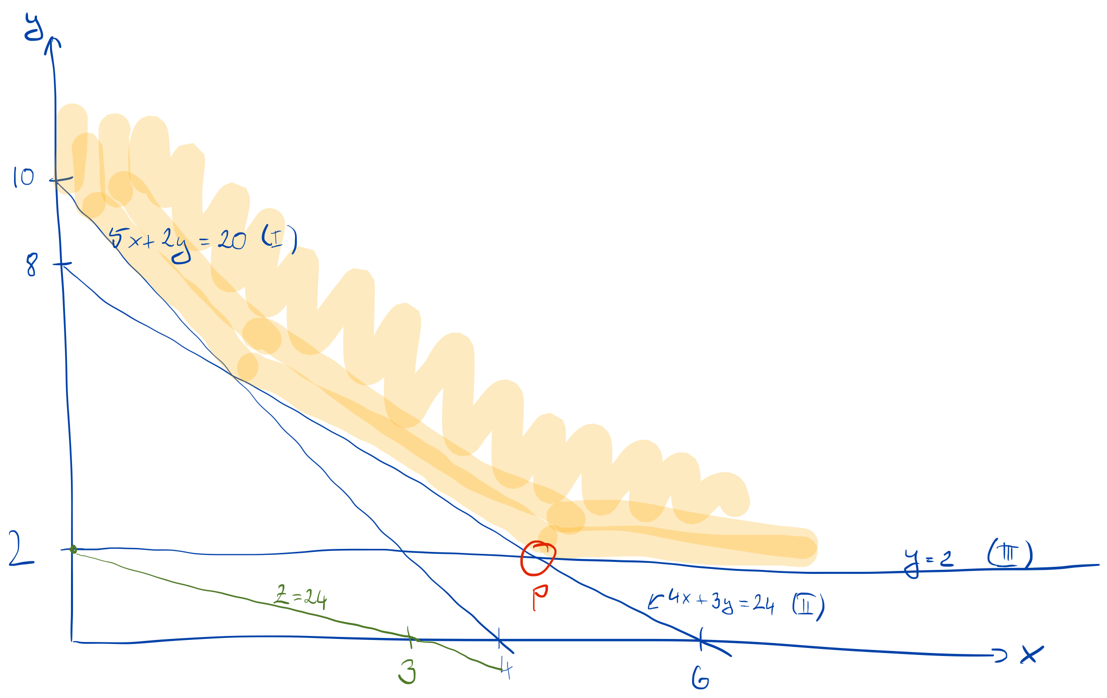
4. Minimieren Sie

$$z = 8\,x + 12\,y$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 5\,x + 2\,y &\geq 20\,, && (\mathrm{I}) \\ 4\,x + 3\,y &\geq 24\,, && (\mathrm{II}) \\ y &\geq 2\,, && (\mathrm{III}) \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

mit der grafischen Methode. (10)



Die Gerade z = Const ist flacher als die Gerade (II), damit ist P der Optimalpunkt.

Es gilt $4x + 3 \cdot 2 = 24 \Rightarrow 4x = 18 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$, also $P = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$

und $z = 8 \cdot \frac{9}{2} + 12 \cdot 2 = 36 + 24 = 60$

5. Führen Sie einen Schritt der Simplexmethode durch und geben Sie an, ob das Verfahren nach diesem Schritt bereits abbricht, oder ob mindestens noch ein weiterer Schritt nötig ist.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	0	1	0	0	10
1	2	-2	0	1	0	20
0	1	2	0	0	1	5
-1	1	-2	0	0	0	0

(10)

Da -2 die negative Zahl mit größtem Betrag ist, wird x_3 neue Basisvariable.

Neuer Pivot wird 2, da es keinen weiteren positiven Eintrag in dieser Spalte gibt. Der Umformungsschritt erfordert $Z2 + Z3 \to Z2$, $\frac{1}{2} Z3 \to Z3$, $Z3 + Z4 \to Z4$:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
2	1	0	1	0	0	10
1	3	0	0	1	1	25
0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
-1	2	0	0	0	1	5

Jetzt sind x_3, s_1, s_2 Basisvariablen. In der letzten Zeile ist noch der Koeffizient von x_1 negativ. D.h., wir können noch mindestens einen weiteren Schritt machen, bei dem x_1 Basisvariable wird.

6. Gegeben ist das Transportproblem mit 3 Angebotsorten mit den Angeboten

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 5\,, \quad a_3 = 2$$

und 3 Nachfrageorten mit den Bedarfen

$$b_1 = 3\,, \quad b_2 = 1\,, \quad b_3 = 4$$

sowie die 3×3-Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Woran sehen Sie, dass das Problem lösbar ist? Hat es ganzzahlige Lösungen?

(b) Bestimmen Sie eine zulässige Lösung mit der Nordweststreckenregel.

(c) Ein Kollege hat das duale Problem bereits gelöst und nennt Ihnen die optimale Zielfunktion des dualen Problems, $z = 11$. Zeigen Sie mit dieser Information, dass Ihre mit der Nordweststreckenregel bestimmte Startlösung nicht optimal sein kann.

(d) Bekannt seien außerdem die optimalen Schattenpreise: Auf der Angebotsseite,

$$u_1 = 1\,, \quad u_2 = 2\,, \quad u_3 = 0\,,$$

auf der Nachfrageseite

$$v_1 = 1\,, \quad v_2 = 2\,, \quad v_3 = 2.5\,.$$

Sie haben die Möglichkeit, eine Produktionseinheit von einem Angebotsort auf einen anderen Angebotsort zu verlagern. Von wo nach wo würden Sie verlagern, um die Transportkosten optimal zu senken? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5+5+5+5)

(a) Das Problem ist balanciert, da $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 5 + 2 = 8$,
ebenso $b_1 + b_2 + b_3 = 3 + 1 + 4 = 8$.

Damit liefert die NW-Streckenregel eine zulässige Lösung, siehe (b).

Eine ganzzahlige optimale Lösung existiert, da alle Angebot (a_i) und Nachfragezahlen (b_i) ganzzahlig sind.

(b) $x_{11} = 1$, damit ist Angebot a_1 aufgebraucht, Nachfrage $b_1 = 3-1 = 2$

$x_{21} = 2$, damit ist Nachfrage b_1 befriedigt, Angebot $a_2 = 5-2 = 3$

$x_{22} = 1$, damit ist Nachfrage b_2 befriedigt, Angebot $a_2 = 3-1 = 2$

$x_{23} = 2$, damit ist Angebot a_2 aufgebraucht, Nachfrage $b_3 = 4-2 = 2$

$x_{33} = 2$, fertig

Alle weiteren x_{ij} bleiben 0.

(c) Die Transportkosten der Lösung aus (b) betragen:

$$
\begin{aligned}
& x_{11} c_{11} + x_{21} c_{21} + x_{22} c_{22} + x_{23} c_{23} + x_{33} c_{33} \\
&= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 5 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 + 10 \\
&= 15 > 11
\end{aligned}
$$

Nach dem Dualitätssatz kann die Lösung aus (b) also nicht optimal sein.

(d) Die Verlagerung sollte vom Standort mit dem niedrigsten Schattenpreis auf den Standort mit dem größten Schattenpreis erfolgen, da ein hoher Schattenpreis bedeutet, dass das Gut auf diesem Markt knapp ist.

Also von A3 ($u_3 = 0$) nach A2 ($u_2 = 2$) verlagern.