

Mathematisches Programmieren

Sommersemester 2022

29.06.2022, 06.07.2022, 13.07.2022 und 20.07.2022

1. Untersuche die Zerlegung eines Bildes, das als Matrix mit Grauwertstufen zur Verfügung steht, mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

(a) Testbilder stehen im „Scikit Image“ zur Verfügung, z.B.

```
from skimage import data
I = data.camera()
```

und können folgenderweise angezeigt werden:

```
figure()
imshow(I, cmap='binary_r')
show()
```

(b) Zerlegen Sie das Bild in Singulärwerte und -vektoren (Funktion `svd`). Plotten Sie die Singulärwerte als Funktion ihres Index. Was stellen Sie fest?

(c) Was passiert, wenn Sie nur die ersten k Singulärwerte behalten, alle weiteren Singulärwerte zu Null setzen? Wie sieht das rekonstruierte Bild aus, wenn k klein bzw. groß ist?

(d) Schauen Sie sich die verschiedenen „Eigenbilder“ an, indem Sie genau einen Singulärwert 1 setzen, alle anderen auf 0. Wie verändert sich die Struktur der „Eigenbilder“ mit dem Index k ?

2. Konstruieren Sie, parallel zur Konstruktion des diskreten Laplaceoperators im Aufgabenblatt 2, einen Unschärfefilter A_1 , bei dem ein Pixelwert mit seinen nächsten Nachbarn auf folgende Weise gemittelt wird:

$$u_{ij}^{\text{blur}} = \frac{1}{2} u_{ij} + \frac{1}{8} u_{i,j+1} + \frac{1}{8} u_{i,j-1} + \frac{1}{8} u_{i+1,j} + \frac{1}{8} u_{i-1,j}.$$

Die Bilddaten sollen dabei in einen langen eindimensionalen Vektor x verwandelt werden (`ravel()` oder `flatten()`) und die Wirkung des Unschärfeoperators als CSR-*sparse matrix* codiert werden. Wenden Sie die Singulärwertzerlegung auf den Unschärfeoperator an und stellen die Verteilung der Singulärwerte grafisch dar. Untersuchen Sie auch höhere Potenzen $A_m = A_1^m$ für $m \approx 10$.

3. Wenden Sie den Unschärfefilter A_m auf das Bild aus Aufgabe 1a an, i.e, $b = A_m x$. Was sehen Sie, wenn Sie m verändern?
4. Rekonstruieren Sie das ursprüngliche Bild aus dem Datenvektor b . Was passiert, wenn Sie einen Zufallsvektor mit Mittelwert 0 und sehr kleiner Varianz zu b addieren, bevor Sie das System lösen?

Hinweis: Für das volle Testbild mit 512×512 wird `spsolve` zu langsam sein. Verwenden Sie einen iterativen Löser wie `cg` oder `gmres`.

5. Implementieren Sie die Tychonov-Regularisierung *ohne explizite Singulärwertzerlegung*. Was passiert, wenn Sie den Regularisierungsparameter α verändern?

Hinweis: Um hier schnell zu experimentieren, verwenden Sie einen Ausschnitt des Originalbildes, z.B.

```
I = I[120:170,250:300]
```

6. Implementieren Sie die Wahl des Regularisierungsparameters nach dem Diskrepanzprinzip von Morozov.

Hinweis: Verwenden Sie `brent` oder `ridder` zum Lösen der nichtlinearen Gleichung und lösen Sie $\alpha = 10^\beta$ mit β als unabhängiger Variable und stark reduzierter Toleranz (z.B. `xtol=0.1`), um Rechenzeit zu sparen.

Geben Sie ihren lauffähigen Code per Email in einem ZIP-Archiv bis zum 29.07.2022 ab. Schreiben Sie zu jeder Aufgabe einen kurzen Kommentar, der die gestellte Frage explizit beantwortet. Legen Sie diese Antworten als einfach Textdatei oder Scan einer handschriftlichen Ausarbeitung bei.