

Mathematisches Programmieren

Sommersemester 2022

27.04.2022, 04.05.2022 und 18.05.2022

1. Schreiben Sie ein Programm, das die ersten n Glieder der von der logistischen Abbildung

$$y_{n+1} = r y_n (1 - y_n) \quad (*)$$

erzeugten Zahlenfolge zum Anfangswert $y_0 = 0.5$ berechnet. Probieren Sie verschiedene Werte für r im Intervall $[2.5, 4]$ aus und stellen Sie die Folge in einem Koordinatensystem dar. Wählen Sie dabei n und den dargestellten Abschnitt der Folge sinnvoll.

2. Zeigen Sie mathematisch, dass die logistische Abbildung (*) das Intervall $[0, 1]$ auf sich selbst abbildet, falls $r \in [0, 4]$.
3. Teilen Sie das Intervall $[0, 1]$ in M Teilintervalle. Schreiben Sie ein Programm, das die logistische Abbildung viele Male iteriert und erstellen Sie ein Histogramm über die Anzahl der Folgenglieder, die in jedem Teilintervall liegen.
4. Modifizieren Sie ihr Programm so, dass die Berechnung der Folgenglieder für einen Vektor von N verschiedenen Werten für r „parallel“ erfolgt. Das so erzeugte Histogramm ist eine Matrix, die Sie mit der Funktion `imshow` anzeigen lassen können.
5. Schreiben Sie ein Programm, das die fraktale Dimension im Sinne der „Box-counting Dimension“ des Attraktors der logistischen Abbildung am kritischen Wert des Bifurkationsparameters, $r = 3.569945672$, berechnet.

Hinweise:

- Die „Box-counting Dimension“ (oder auch „Capacity Dimension“) ist definiert als

$$d_{\text{capacity}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}},$$

wobei ε die Intervalllänge der Unterteilung aus Aufgabe 3 ist und $N(\varepsilon)$ die Anzahl der Intervalle bezeichnet, die von der Lösungsfolge berührt werden.

Dieser Grenzwert kann numerisch nicht direkt berechnet werden. Um eine gute Näherung zu erhalten, tragen Sie ε und $N(\varepsilon)$ in ein doppelt-logarithmisches Koordinatensystem auf, so dass die Dimension als Steigung der Ausgleichsgeraden

abgelesen werden kann. Ggf. müssen Sie das Ablesen der Geradensteigung auf einen kleineren Bereich beschränken, in denen die lineare Abhängigkeit zwischen $\log \varepsilon$ und $\log N(\varepsilon)$ robust ist.

- Um $N(\varepsilon)$ einfach zu berechnen, erstellen Sie zunächst ein Histogramm wie in Aufgabe 2 für die feinste Einteilung mit $N_{\text{bins}} = 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dieses Histogramm vergrößern Sie schrittweise, indem Sie benachbarte Einträge sukzessive paarweise addieren.
6. Nachdem Sie in Aufgabe 5 einen geeigneten Bereich identifiziert haben, in dem sich die Steigung der Geraden im doppelt-logarithmischen Koordinatensystem robust ablesen lässt, modifizieren sie Ihren Code, so dass diese Geradensteigung, also die Dimension d_{capacity} , numerisch als Differenzenquotient berechnet wird. Führen Sie diese Rechnung, wie in Aufgabe 4, „parallel“ für verschiedene Werte von r in einem kleinen Intervall um den kritischen Wert $r = 3.569945672$ aus und stellen Sie d_{capacity} in Abhängigkeit von r grafisch da.

Zur Abgabe bis zum 27.05.2022:

- Ihren lauffähigen Code zu den Aufgaben 4, 5 und 6. Wählen Sie dabei die verschiedenen Parameter so, dass der Code in angemessener Zeit eine sinnvolle grafische Ausgabe erzeugt. Achten Sie auf eine angemessene Beschriftung der Koordinatenachsen und verwenden Sie ggf. eine Legende.
- Die schriftliche Lösung zur Aufgabe 2.
- Versuchen Sie, aus den Ergebnissen der Aufgabe 6 eine Vermutung über das Verhalten der „Box-counting Dimension“ in Abhängigkeit des Parameters r aufzustellen.
- Beschreiben Sie die Unsicherheit Ihrer Ergebnisse in unmittelbarer Nähe des kritischen Wertes des Parameters r .

Hinweis: Sie können die Zuverlässigkeit ihrer Ergebnisse abschätzen, in dem Sie numerischen Parameter, nämlich (a) die Anzahl der Iterationen, die in das Histogramm einfließen, (b) die Anzahl der Vor-Iterationen, die sie durchführen, bevor Sie das Histogramm aufnehmen und (c) die Anzahl der Unterteilungen des Histogramms verändern. Idealerweise sollte sich das Ergebnis nicht wesentlich ändern, aber ist das wirklich der Fall?

Abgabe der Codes gerne per Email, in einem ZIP-Archiv. Die schriftlichen Aufgaben können Sie als PDF beifügen oder am 25.05. persönlich abgeben.