

Regulär oder singulär? – Mathematische und numerische Rätsel in der Strömungsmechanik

Robert M. Kerr and Marcel Oliver

Zusammenfassung In diesem Beitrag geht es um die Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die Euler- und Navier–Stokes-Gleichungen. Wir skizzieren die bis heute ungelöste mathematische Frage, bekannt insbesondere durch das „Navier–Stokes Millenniumsproblem“, ob zunächst reguläre Lösungen Singularitäten entwickeln können. Dabei stellen wir insbesondere die Rolle von Computersimulationen als Motor für die Entwicklung neuer Mathematik dar.

1 Einleitung

Bei „Turbulenz“ denkt man vielleicht an das plötzliche Rütteln der Maschine während der letzten Flugreise oder an das unregelmäßige Heulen des Windes in einem Sturm. Turbulenz ist aber nicht immer ein Naturspektakel, sondern umgibt uns ständig. Ohne sie würde sich ein Zimmer nur extrem langsam aufheizen oder abkühlen. Eine Hummel fliegt nur Dank der Turbulenz um ihre Flügel. Diese allgegenwärtige Turbulenz verstehen wir jedoch sehr viel weniger als die riesigen Wirbel und Wellen, die wir im Flugzeug als „Luftlöcher“ spüren, oder die starken Scherwinde in einem Wirbelsturm.

Ein Grund hierfür ist, dass die Gleichungen der Strömungsmechanik zwar seit fast 200 Jahren bekannt sind, wir aber bis heute nicht wissen, ob sie grundlegende mathematische Kriterien erfüllen: Könnten Lösungen dieser Gleichungen plötzlich Unstetigkeitsstellen oder Singularitäten entwickeln?

Robert M. Kerr

Department of Mathematics, School of Engineering, and Centre for Scientific Computing, University of Warwick, Gibbet Hill Road, Coventry CV4 7AL, UK.

e-mail: Robert.Kerr@warwick.ac.uk

Marcel Oliver

School of Engineering and Science, Jacobs University, 28759 Bremen, Germany.

e-mail: oliver@member.ams.org

Wäre dies der Fall, so wäre die mathematische Beschreibung von Strömungen auf kleinsten Skalen unvollständig.

In diesem Beitrag soll die mathematische Seite dieses Problems einfach, aber präzise beschrieben werden. Desweiteren stellen wir dar, wie sich Computersimulationen und mathematische Theorie gegenseitig ergänzen und weiterbringen. Wir beginnen mit einer Einführung in die Gleichungen der Strömungsmechanik. Danach, in Abschnitt 3, besprechen wir Erhaltungssätze, die sich wie ein roter Faden durch die Mathematik der Strömungsmechanik ziehen. Die zentrale offene Frage nach der globalen Regularität von Lösungen wird im Abschnitt 4 vorgestellt; im Abschnitt 5 erläutern wir die beiden Standpunkte der wissenschaftlichen Debatte mit heuristischen Argumenten für und wider des Auftretens von Singularitäten. Abschnitte 6 und 7 beschreiben, wie Theorie und numerische Experimente in einem iterativen Prozess zu Szenarien führen, die unser Verständnis über den Formationsprozess möglicher Singularitäten verfeinern. Schließlich bietet Abschnitt 8 eine Auswahl von Fragestellungen aus der aktuellen Forschung.

Zu diesem Artikel gehören drei technische Anhänge. Für Leser, die noch nicht mit mehrdimensionaler Differential- und Integralrechnung vertraut sind, fasst Anhang A die wichtigsten Konzepte und Formeln kurz, aber intuitiv zusammen. Im Anhang B leiten wir sogenannte Energieabschätzungen her, die einen qualitativen Eindruck vom heutigen Kenntnisstand zur Regularität der Navier–Stokes-Gleichungen geben. Schließlich stellen wir in Anhang C spektrale und pseudospektrale numerische Verfahren vor.

Es ist nicht möglich, im Rahmen dieses Beitrages alle Originalarbeiten zu den hier vorgestellten Themengebieten angemessen zu würdigen. Wir verzichten daher ausdrücklich auf historische Vollständigkeit und verweisen den Leser statt dessen auf die exzellenten Übersichtsarbeiten [2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 17] und hoffen, dass er diese als Ausgangspunkt für eigene Expeditionen durch die umfangreiche Fachliteratur nimmt.

2 Die Differentialgleichungen der Strömungsmechanik

Obwohl die Gleichungen der Strömungsmechanik auf dem ersten Blick kompliziert wirken, ist die zugrundeliegende Konstruktion überraschend einfach: Man nehme das aus der klassischen Teilchenmechanik bekannte zweite Newtonsche Gesetz, verpacke es in der Sprache der Kontinuumsmechanik neu und wähle speziell ein Kraftgesetz, welches ein fließendes Medium charakterisiert.

Wir beginnen also mit Newtons Gleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, die besagt, dass die auf eine Punktmasse wirkende Kraft gleich dem Produkt der Masse und ihrer Beschleunigung ist und die vermutlich aus der Schule bekannt ist. Die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, mithilfe der Differentialrechnung können wir also schreiben $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$; die Geschwindigkeit ist wiederum die Änderungsrate des Aufenthaltsortes $\mathbf{x}$, also

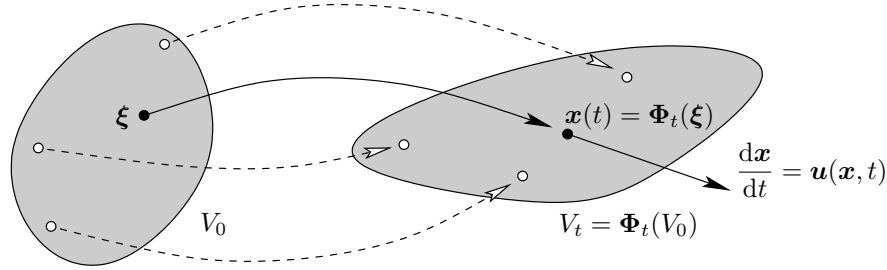


Abbildung 1. Die Flussabbildung Φ_t bildet die Ausgangskonfiguration des Fluids auf seine Konfiguration zu einer späteren Zeit $t > 0$ ab und verformt z.B. ein Teilgebiet V_0 in V_t . Ein ausgezeichnetes „Fluidteilchen“ wird dabei vom Ausgangsort ξ zur Stelle $x(t) = \Phi_t(\xi)$ transportiert und bewegt sich dort mit der Geschwindigkeit $u(x(t), t) = dx/dt$.

$v(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$. Hängt die wirkende Kraft nur vom Ort $\mathbf{x}$ ab, so führt das Newtonsche Gesetz auf die Differentialgleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = m d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$, wobei es die Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ zu ermitteln gilt.

Eine Strömung kann man sich dann als Kontinuum punktförmiger, sich bewegender Teilchen vorstellen, die einen Behälter — ein *Gebiet* Ω als Teilmenge des $d = 2$ - oder $d = 3$ -dimensionalen Raumes — vollständig füllen. Ein ausgezeichnetes Teilchen, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $\xi \in \Omega$ befindet, beschreibt im Weiteren eine Bahnkurve, die mit $\mathbf{x}(t)$ bezeichnet sei. Da nun jedem Punkt in Ω eine solche Kurve entspringt, definiert die Gesamtheit dieser Kurven für jedes feste $t \geq 0$ eine Abbildung Φ_t des Gebietes Ω auf sich selbst; siehe Abbildung 1. Man spricht von der *Flussabbildung* oder kurz dem *Fluss*.

Das Newtonsche Gesetz gilt für jedes dieser „Strömungsteilchen“, genauer gesagt gilt es für die einem jedem Teilgebiet V_t enthaltene Masse im Grenzfalle, dass die Ausdehnung des Teilgebietes gegen Null geht. In diesem Grenzwert geht es also nicht mehr um die Masse m , sondern um die *Massendichte* $\rho(\mathbf{x}, t)$.¹ Das Newtonsche Gesetz trifft dementsprechend die Aussage, dass die wirkende *Kraft pro Volumen* identisch $\rho \mathbf{a}$ sein muss.

Was jetzt noch fehlt ist eine Annahme über die wirkende Kraft pro Volumen, denn das bisher Gesagte gilt für beliebige mechanische Kontinua wie z.B. auch elastische Festkörper. Ein Fluid, also eine Flüssigkeit oder ein Gas, ist dadurch charakterisiert, dass die Kraft, die ein Teilchen auf seine Nachbarn ausübt, richtungsunabhängig ist. Sie lässt sich daher durch eine einzige skalare Größe, den *Druck* $p(\mathbf{x}, t)$ beschreiben. Der Druck hat die Einheit Kraft pro Fläche, und zwar aus folgendem Grund: Ein Teilchen wird nicht beschleunigt, wenn es aus allen Richtungen gleich starke Kräfte erfährt — es kann nur auf *Druckdifferenzen* ankommen. Im Grenzfalle verschwindender Ausdehnung

¹ Die in einem endlichen Teilgebiet enthaltene Masse ist dann durch das Integral von ρ über dieses Teilgebiet gegeben.

des Teilgebietes ergibt sich die Kraft pro Volumen daher als Grenzwert eines Differenzenquotienten,² dem negativen Druckgradienten $-\nabla p$. (Der Gradientenoperator ∇ wird in Gleichung (15) in Anhang A.1 eingeführt. Er wirkt hier nur auf die Ortsvariablen $\mathbf{x}$.) Das Minuszeichen ist notwendig, weil die Kraft in Richtung der Bereiche niedrigen Drucks wirken soll. Das Newtonsche Gesetz für Fluide ergibt sich nun durch Gleichsetzen der zwei Ausdrücke für die Kraft pro Volumen:

$$-\nabla p(\mathbf{x}(t), t) = \rho(\mathbf{x}(t), t) \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2}. \quad (1)$$

Im Prinzip ist dies bereits die gesuchte Gleichung. In dieser Form ist sie aber unhandlich, weil sie sogenannte *Eulersche* und *Lagrangesche Größen* vermischt. Man sagt, eine Größe sei Eulersch, wenn sie eine direkte Funktion des aktuellen Ortes $\mathbf{x}$ ist. Von einer Lagrangeschen Größe spricht man, wenn sie explizit von den Ausgangspositionen ξ der Teilchen abhängt. In (1) sind also Druck und Dichte Eulersch,³ der Teilchenort $\mathbf{x}$ selbst, die Teilchengeschwindigkeit $d\mathbf{x}/dt$ und die Beschleunigung $d^2\mathbf{x}/dt^2$ hingegen Lagrangesch. Es ist daher oft praktisch, (1) komplett in Eulerschen Größen auszudrücken. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit, die ein *ruhender* Beobachter am Ort $\mathbf{x}$ zur Zeit t misst, mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Dies ist aber genau die Geschwindigkeit des gerade vorbeikommenden Teilchens, daher muss gelten

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t). \quad (2)$$

Leiten wir diese Identität mithilfe der mehrdimensionalen Kettenregel, die in Anhang A.1 erklärt ist, nach der Zeit ab, so erhalten wir einen rein Eulerschen Ausdruck für die Teilchenbeschleunigung, nämlich

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t). \quad (3)$$

² Betrachte ein kleines quaderförmiges Teilgebiet, das in den drei Koordinatenrichtungen die Längen (a, b, c) hat. Die drei Komponenten der auf den Quader wirkenden Kraft seien F_1 , F_2 , und F_3 . Dann ist F_1 , die x_1 -Komponente der auf den gesamten Quader wirkenden Kraft, gleich dem Druckunterschied zwischen dem linken und rechten Ende des Quaders multipliziert mit bc , der Fläche der linken und rechten Seite. In erster Ordnung ist diese Druckdifferenz $-a \partial p / \partial x_1$ und somit $F_1 \approx -abc \partial p / \partial x_1$. Analoge Betrachtungen für die anderen Koordinatenrichtungen führen auf $\mathbf{F} \approx -abc \nabla p$. Im Grenzwert $a, b, c \rightarrow 0$ sind die Fehler dieser Näherung von höherer Ordnung und verschwinden schneller, wodurch sich genau $-\nabla p$ als Druck pro Volumen ergibt.

³ In (1) werden die Eulerschen Größen ∇p und ρ an der aktuellen Position $\mathbf{x}(t)$ eines Teilchens ausgewertet und sind könnten somit auch als Lagrangesche Größen interpretiert werden. Der Gradient wäre dann jedoch immer noch bezüglich der Ortskoordinaten $\mathbf{x}$ definiert, so dass man diese so nicht einfach eliminieren kann.

Diesen Ausdruck setzen wir in (1) ein und lassen der Übersicht halber die Argumente weg. So erhalten wir mit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0 \quad (4)$$

eine Form des Newtonschen Gesetzes, die erstmals 1757 von Euler formuliert wurde. Fluide, die sich entsprechend diesem Impulssatz verhalten, bezeichnet man als *ideal*, da weder Reibungskräfte, die kinetische Energie in Wärme umwandeln können, noch die Molekularstruktur realer Materie berücksichtigt sind.

Die Beschreibung ist allerdings noch unvollständig, da (4) nur d Gleichungen, aber $d + 2$ unbekannte Funktionen enthält, nämlich die d Komponenten von $\mathbf{u}$, p und ρ . Wir brauchen also zusätzliche Relationen aus der Physik. Konkret: Was passiert mit der Dichte, wenn sich der Druck ändert? Hier gibt es keine allgemeine Antwort, da sich z.B. ein Gas anders verhält als Wasser — es muss sich also um ein Materialgesetz handeln. In diesem Beitrag beschränken wir uns auf den Fall einer inkompressiblen Strömung: Das Volumen eines jeden Fluid-„Päckchens“, das wie V_t in Abbildung 1 durch den Fluss herumgeschoben und deformiert wird, bleibt zeitlich konstant.⁴ Die Änderungsrate des Volumens eines kleinen Päckchens ist bis auf Terme höherer Ordnung durch die *Divergenz* des Vektorfelds $\mathbf{u}$ gegeben, siehe Anhang A.2. Daher ist der Fluss von $\mathbf{u}$ genau dann inkompressibel, wenn $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

Als letzte Vereinfachung nehmen wir an, das Fluid sei *homogen*. Das bedeutet, dass die Dichte auch räumlich konstant ist und daher auf $\rho = 1$ normalisiert werden kann.⁵ Wir erhalten dann die vollständigen *Euler-Gleichungen* für ein homogenes inkompressibles ideales Fluid,

⁴ Bestimmte physikalische Effekte wie Schallwellen oder Schockwellen bei Überschallströmungen können nur mit einem kompressiblen Modell erklärt werden. Sind diese wichtig, muss das Modell anstelle der Inkompressibilitätsbedingung mit den thermodynamischen Zustandsgleichungen für das entsprechende Material sowie Transportgleichungen für die thermodynamischen Größen ausgestattet werden; in diesem allgemeineren Fall ergeben sich die Druckkräfte durch lokale Schwankungen der inneren Energie oder der Temperatur. Der normale Fluss von Wasser und großskalige Luftströmungen sind jedoch in guter Näherung inkompressibel. Kompressibilitätseffekte wirken im Vergleich zu den dominanten Strömungsstrukturen gewöhnlich auf viel kleineren Zeit- und Raumskalen. Löst diese Skalen in einer Simulation nicht korrekt auf (was oft sehr teuer ist), dann wird das numerische Verfahren unter Umständen selbst dann „instabil“, wenn die kleinskaligen Effekte physikalisch eigentlich zu vernachlässigen sind. In diesem Fall rechnet man daher gerne gleich mit dem inkompressiblen Modell.

⁵ Solange kein Vakuum entsteht, verhalten sich homogene und allgemein inkompressible Strömungen sehr ähnlich, so dass diese Annahme keine wesentliche Einschränkung darstellt.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad (5a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5b)$$

Der Druck ist in einer inkompressiblen Strömung durch die Bedingung, dass sich jedes Teilgebiet konsistent zu seinen Nachbarn bewegen muss, eindeutig bestimmt. Er koppelt dabei die nötigen Anpassungen instantan über die gesamte Strömung hinweg.

In der bisherigen Diskussion haben wir Reibungskräfte vernachlässigt. Diese haben aber grundlegende Bedeutung für Theorie und Praxis, so dass sich ihre detaillierte Darstellung nicht vermeiden lässt. Reibung vergrößert die lokale Einheitlichkeit des Flusses, d.h. sie wirkt in jedem Punkt der Abweichung des Geschwindigkeitsfelds gegenüber seinem lokalen Mittel entgegen: Wenn sich ein Teilchen schneller als der Durchschnitt seiner Nachbarn bewegt, wird es durch Reibung gebremst, bewegt es sich langsamer, wird es mitgerissen. Die Abweichung des Mittelwertes einer Funktion über eine kleine Kugel von ihrem Wert am Mittelpunkt wird durch den *Laplace-Operator* Δ gemessen, wie im Anhang A.3 näher erklärt. Es ist also plausibel, dass Reibungskräfte proportional zu $\Delta \mathbf{u}$ sind. Ergänzen wir die Euler-Gleichungen (5) um einen solchen Term, so erhalten wir die *Navier-Stokes-Gleichungen* für ein homogenes inkompressibles Fluid,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (6a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (6b)$$

Den Proportionalitätsfaktor $\nu > 0$ bezeichnet man als *Viskositätskoeffizienten*. Er beschreibt die Zähigkeit des Fluids und ist z.B. für Honig viel größer als für Wasser. Ein Term der Form $\nu \Delta \mathbf{u}$ taucht aus beschriebenem Grund genauso bei der Modellierung von Wärmeflüssen oder Diffusion auf; ein solches Beispiel findet man in L.N. Trefethens Beitrag in diesem Band [18].

Die partiellen Differentialgleichungen (5) und (6) sind *Anfangs-Randwertprobleme*: Zur eindeutigen Bestimmung des Flusses auf beschränkten Gebieten müssen sowohl *Anfangs-* als auch *Randwerte* vorgegeben werden. Zur Vereinfachung nehmen wir hier *periodische Randbedingungen* auf einem quaderförmigen Gebiet Ω an: Wir stellen uns vor, dass der $\mathbb{R}^d$ vollständig mit exakten Kopien von Ω überdeckt ist, wobei die jeweils gegenüberliegenden Seiten des Quaders miteinander identifiziert werden. Also scheint das, was aus einer Seite von Ω hinausfließt, auf der gegenüberliegenden Seite wieder hereinzukommen. Trotz dieser eigentlich unrealistischen Annahme verhalten sich Strömungen mit periodischen Randbedingungen qualitativ wie Strömungen mit physikalischen Randbedingungen, wenn man von Grenzschichteffekten in Randnähe absieht.

Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass übliche physikalische Randbedingungen den Massenfluss über den Rand spezifizieren. Bei den Navier-Stokes-Gleichungen ist zudem die Vorgabe des sogenannten Impulsflusses und

damit der Reibungskraft am Rand notwendig, und zwar auch dann, wenn der Energieverlust durch Reibung eigentlich vernachlässigbar klein ist. Dieser fundamentale Unterschied zwischen Euler- und Navier–Stokes Randbedingungen spielt z.B. bei der Erklärung des Auftriebs an Flügeln eine entscheidende Rolle. Das Thema Grenzschichten bei Randwertproblemen möchten wir hier aber nicht weiter vertiefen.

3 Erhaltungssätze

In der klassischen Mechanik gibt es drei grundlegende Erhaltungsgrößen: Impuls, Energie und Drehimpuls. Jede dieser Größen hat eine ebenso fundamentale Entsprechung in der Strömungsmechanik. Die Impulserhaltung wird durch das zweite Newtonsche Gesetz ausgedrückt und ist damit bereits explizit enthalten. Für die kinetische Energie eines Punktteilchens kennen wir aus der Mechanik den Ausdruck $E = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$. Beim Übergang zum Kontinuum geht die Masse m in die Dichte ρ über; entsprechend wird aus E die kinetische Energiedichte $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2$. Bei einer inkompressiblen Strömung ist die gesamte Energie kinetisch, so dass wir die Gesamtenergie E durch Integration der kinetischen Energiedichte über das Gebiet Ω erhalten. Mit $\rho = 1$ ist also

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (7)$$

Eine einfache Rechnung in Anhang B.1 zeigt, dass eine Euler-Strömung E erhält, während E bei einer Navier–Stokes-Strömung mit der Zeit (durch Umwandlung von kinetischer Energie in Wärme) abnimmt.

Die dritte Erhaltungsgröße der Punktteilchenmechanik ist der *Drehimpuls*, der die Rotation des Systems um einen Referenzpunkt beschreibt. In der Strömungsmechanik benötigen wir statt eines Referenzpunktes eine geschlossene Referenzkurve C_0 , die in der Strömung „mitschwimmt“ und so eine zeitabhängige Kurvenschar $C_t = \Phi_t(C_0)$ definiert. Bezüglich einer beliebigen Referenzkurve definieren wir dann die *Zirkulation* als das Kurvenintegral

$$\Gamma_t = \oint_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \quad (8)$$

Das Kurvenintegral repräsentiert die (Riemann-)Summation der zur Kurve C_t tangentialen Geschwindigkeitskomponente entlang dieser Kurve, siehe Anhang A.4. Jedes so definierte Γ_t ist eine Erhaltungsgröße der Euler-Gleichungen. Mit dem Satz von Stokes, ebenfalls in Anhang A.4 erläutert, kann man die Zirkulation auch als Flächenintegral

$$\Gamma_t = \int_{S_t} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{A} \quad (9)$$

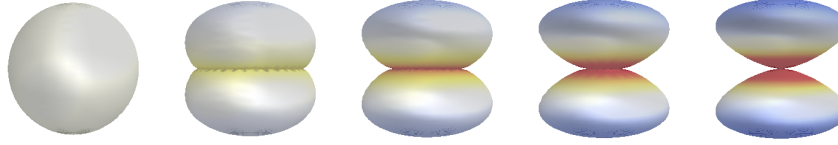


Abbildung 2. Illustration des Gedankenexperiments eines sich drehenden Ballons. Die Erhaltung der Zirkulation impliziert, dass sich die Geschwindigkeit entlang der Mitte beim Zusammenziehen des Lassos erhöht (durch rote Farben gekennzeichnet), während sich die Geschwindigkeit in den äußeren Blasen verringert (blau).

ausdrücken. Dabei ist S_t eine beliebige orientierte Fläche mit Rand C_t , die sich ebenfalls mit der Strömung bewegt, und ω ist die *Wirbelstärke*

$$\omega = \text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (10)$$

Die i -te Komponente des Wirbelstärkevektors ist gerade der Grenzwert der Zirkulation pro Einheitsfläche in der Ebene senkrecht zur x_i -Richtung. Intuitiv misst sie, wie stark sich ein vom Fluss mitgetragenes kleines Blatt um den i -ten Koordinatenvektor dreht. Ist die Strömung zweidimensional, etwa parallel der x_1 - x_2 -Ebene, so ist nur die dritte Komponente von (10) von Null verschieden und wir können die Wirbelstärke als skalare Größe $\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2$ betrachten.

Die Zirkulationserhaltung erklärt einen grundlegenden Unterschied zwischen Strömungen in zwei und drei Raumdimensionen: In zwei Dimensionen ist „Volumen“ mit Fläche gleichzusetzen, so dass Inkompressibilität die zeitliche Invarianz des Flächenmaßes von S_t impliziert. Lässt man dieses dann in (9) gegen Null gehen, so folgt aus der Erhaltung der Zirkulation die punktweise Erhaltung der Wirbelstärke entlang der Bahnkurven der Strömung, den *Flusslinien*. Mithilfe der punktwweisen Erhaltung der Wirbelstärke kann man die Entwicklung von Singularitäten mathematisch ausschließen. In drei Dimensionen gibt es jedoch keinen Zusammenhang zwischen Volumen- und Flächenerhaltung, entsprechend auch keinen Zusammenhang zwischen Zirkulationserhaltung und der Länge des Wirbelstärkevektors. Damit bleibt die Antwort auf die Frage nach Singularitäten offen, was wir im nächsten Abschnitt noch genauer besprechen.

Die Rolle von Wirbelstärke und Zirkulation für die Dynamik möglicher Singularitäten kann man mit einem einfachen Gedankenexperiment veranschaulichen. Man fülle einen Ballon mit einer inkompressiblen ruhenden Flüssigkeit und binde ein Lasso um dessen Mitte. Dieses zieht man in endlicher Zeit zu einem Punkt zusammen, so dass die „Taille“ des Ballons langsam abgeschnürt wird, siehe Abbildung 2. Offensichtlich erzeugen wir mit der Trennung der beiden Blasen eine topologische Singularität, jedoch bleiben Geschwindigkeit und Wirbelstärke des Flusses beschränkt.

Wir wiederholen das Gedankenexperiment nun mit einer um die Symmetrieachse rotierenden Flüssigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential zum Lasso, so dass nach Definition des Kurvenintegrals die Zirkulation um das Lasso durch das Produkt aus skalarer Strömungsgeschwindigkeit und Umfang der Öffnung gegeben ist. Da die Zirkulation konstant bleibt, müssen Geschwindigkeit und Wirbelstärke unbeschränkt wachsen, sobald wir das Lasso zusammenziehen; siehe Abbildung 2. Dies ist vergleichbar mit einer Eiskunstläuferin, die sich umso schneller dreht, je näher sie ihre Körpermasse an die Drehachse ihrer Pirouette bringt, und so durch die Erhaltung des Drehimpulses angetrieben wird. Die Singularität mit Rotation ist also viel umfassender als ohne.

Die Frage ist nun, ob eine solche oder auch andere Singularität durch die Wechselwirkung der Strömung mit sich selbst auch ohne externe Zwangskräfte entstehen kann. Für die Euler-Gleichungen weiß man, dass jede Singularität notwendigerweise mit einer Singularität der Wirbelstärke einhergeht, hierauf wird in Abschnitt 7 näher eingegangen. Daher könnte das Abschnüren des sich drehenden Ballons möglicherweise die Bewegung eines Teilgebietes eines singulären Flusses sein, während das Abschnüren des sich nicht drehenden Ballons nicht als isolierte Singularität im Inneren einer Strömung auftreten kann.

Diese Gedankenexperiment lässt sich nicht ohne weiteres auf die Navier–Stokes-Gleichungen übertragen, weil Reibung am Lasso eine Geschwindigkeitssingularität verhindern würde. Die allgemeine Fragestellung ist aber ähnlich der für die Euler-Dynamik und ebenso ungelöst, wie wir im Folgenden skizzieren.

4 Das Clay-Millennium-Problem

Die elementarste mathematische Kriterium, das eine partielle Differentialgleichung wie (5) oder (6) erfüllen sollte, ist die *Wohlgestelltheit*. Dieser Begriff umfasst (i) die Existenz einer Lösung — das Zustand des Systems muss sich in die Zukunft entwickeln lassen, (ii) die Eindeutigkeit der Lösung — die Zukunft hängt nur von der Gegenwart ab, und (iii) die Stabilität der Lösung — zukünftige Zustände lassen sich beliebig genau aus den Anfangsdaten bestimmen, wenn diese hinreichend genau bekannt sind, d.h. die Zukunft hängt stetig von der Gegenwart ab.

Für die inkompressiblen Euler- und Navier–Stokes-Gleichungen sind diese Fragen noch nicht vollständig beantwortet. Es sind aber verschiedene Teilergebnisse bekannt. Insbesondere sind beide Gleichungen *lokal wohlgestellt*: Lösungen mit glatten (also beliebig oft differenzierbaren) Anfangswerten hängen eindeutig und stetig von den Anfangswerten ab und bleiben mindestens über ein endliches, möglicherweise sehr kurzes Zeitintervall glatt. Dies beweist man etwa dadurch, dass man die Gleichungen als Fixpunkt-

problem in einem geeigneten Funktionenraum formuliert. Ein solcher Beweis vernachlässigt zwar einen Großteil der problemspezifischen Struktur, impliziert aber, dass es für die Fortsetzbarkeit der Lösung über das lokale Zeitintervall hinaus nur zwei Möglichkeiten gibt: Bezeichnet $[0, T^*)$ das maximale Zeitintervall, auf dem die Lösung existiert, so gilt entweder $T^* = \infty$ oder ein Maß der Lösung wie z.B. die maximale Wirbelstärke für $t \rightarrow T^*$. Ist letzteres der Fall, so sprechen wir von einer Singularität zum Zeitpunkt T^* . Will man zeigen, dass die Gleichung global wohlgestellt ist, so reicht es also, für beliebige $t > 0$ eine Schranke für die das entsprechende Maß der Lösung zu finden.

Die Frage, ob glatte Lösungen der inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen in drei Raumdimensionen beliebig lange fortgesetzt werden können, ist nun eines der sieben Millenium-Probleme des Clay Mathematics Institute. Konkret ist es wie folgt gestellt [8]: *Man beweise, dass anfänglich glatte Lösungen mit periodischen Randbedingungen (oder im $\mathbb{R}^3$, wenn sie hinreichend stark gegen Unendlich abfallen) beliebig lange glatt bleiben, oder man finde eine Lösung, die in endlicher Zeit singulär wird.* Die Frage, ob die dreidimensionalen Euler-Gleichungen global wohlgestellt sind, ist genauso offen, aber nicht „offizieller“ Teil des Millenium-Problems.

In zwei Raumdimensionen bleibt, wie bereits im vorherigen Abschnitt geschildert, die Wirbelstärke von Euler-Lösungen entlang der Flusslinien erhalten. Dies reicht aus, um Singularitäten in endlicher Zeit auszuschließen. Für die zweidimensionalen Navier–Stokes Gleichungen ist der Beweis globaler Wohlgestelltheit sogar noch einfacher, da der Energieverlust durch Reibung stärker ist als die nichtlineare Selbstverstärkung des Flusses, so dass „Energieabschätzungen“, die wir in Anhang B herleiten, bereits das gewünschte Ergebnis liefern.

Eine Lösung der dreidimensionalen Navier–Stokes-Gleichungen kann über den etwaigen Eintritt der ersten Singularität hinaus als „schwache Lösung“ fortgesetzt werden.⁶ Schwache Lösungen sind für alle Zeiten definiert, doch ihre physikalische Aussagekraft ist dadurch beschränkt, dass wir nichts über ihre Eindeutigkeit wissen. Für die dreidimensionalen Euler-Gleichungen kennt man schwache Lösungen nur in Spezialfällen und es gibt konkrete Beispiele für Nichteindeutigkeit.

Weiterhin weiß man, dass „kleine“ Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen nicht singulär werden. Es gibt globale Lösungssätze z.B. unter Annahme kleiner Anfangsdaten, großer Viskosität, oder Nähe zu einer speziellen global existierenden Lösung oder Symmetrie; nach neuen Definitionen von „klein“ wird bis heute geforscht. Physikalisch gesehen sind alle diese Fälle nichtturbulent, mathematisch ist die Situation dadurch charakterisiert, dass der lineare Diffusionsterm $\nu \Delta \mathbf{u}$ die Nichtlinearität $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dominiert. An-

⁶ Auch wenn eine solche Lösung unstetig oder sogar unbeschränkt wird, können Integrale der Lösung über kleine endliche Teilgebiete trotzdem stetig vom Anfangszustand abhängen. Fasst man die Wohlgestelltheitsbedingung (iii) in diesem Sinne auf, so könnte sie also immer noch erfüllt sein.

schaulich ausgedrückt könnten wir für jede Singularität, die vielleicht in einer Wasserströmung entsteht, das Wasser durch Honig ersetzen, und wenn dieser zäh genug ist, damit das Entstehen der Singularität unterdrücken. Solche Argumente lassen sich offensichtlich nicht auf die Euler-Gleichungen, die ja viskositätsfrei sind, übertragen. Ebenfalls nur für die Navier–Stokes-Gleichungen gibt es sogenannte partielle Regularitätssätze die besagen, dass schwache Lösungen nur wenige (in einem bestimmten maßtheoretischen Sinn) singuläre Punkte haben können.

Zum Abschluss dieses Überblicks noch eine kleine Überraschung: Auf unbeschränkten Gebieten sind durchaus singulär werdende Lösungen bekannt, und zwar mit und ohne Viskosität und sogar in zwei Raumdimensionen. Doch in allen diesen Fällen ist die kinetische Energie pro Volumen bereits in den Anfangsdaten unbeschränkt. Es müssen also beliebig hohe Geschwindigkeiten auftreten, was physikalisch Unsinn ist. Solche Beispiele werden daher nicht als Lösungen des Clay-Millennium-Problems akzeptiert.

5 Regulär oder nicht regulär, das ist hier die Frage

Auch wenn die Antwort auf die Millennium-Frage noch aussteht, so gibt es doch eine Reihe heuristischer Argumente für und wider des Auftretens von Singularitäten. Eine so oft zitierte wie irreführende Analogie sind die Burgers-Gleichungen mit und ohne Viskosität. Man kann sich diese Gleichungen als Navier–Stokes bzw. Euler-Gleichungen ohne Druck vorstellen, also mit $p = 0$ und ohne Inkompressibilitätsbedingung, damit das System nicht Überspezifiziert wird. Die Gleichungen bilden dann keinen physikalischen Vorgang mehr ab, sind aber als Modellproblem interessant, denn ihr Verhalten folgt einem klaren Schema: Ohne Viskosität bewegt sich jedes Teilchen einfach unbeschleunigt entsprechend seiner Anfangsgeschwindigkeit fort, es entstehen also generische Singularitäten durch Teilchenkollisionen. Mit Viskosität kann die Maximalgeschwindigkeit nicht größer als im ungebremsten Fall werden, und die Wirkung der Reibung reicht dann aus, um das Auftreten von Singularitäten zu verhindern.

Man kann aber nicht erwarten, dass sich aus dem Verhalten der Burgers-Gleichungen ein Prinzip ableiten lässt, dass sich auf echte Strömungsmechanik überträgt. Bei inkompressiblen Strömungen verlieren wir die direkte Kontrolle über die auftretenden Geschwindigkeiten, was daran liegt, dass der Druck einen instantanen Anpassungsprozess über das gesamte Gebiet hinweg koppelt. Daraus zu schließen, dass sich die strömungsmechanischen Gleichungen strikt „schlechter“ verhalten als die entsprechenden Burgers-Gleichungen ist aber ebenso falsch. Der Druck scheint inkompressible Strömungen zu einem gewissen Grad stabilisieren zu können, sonst hätten ja die Euler-Gleichungen in zwei Dimensionen keine global regulären Lösungen. Wir müssen also auf

ganz andere Strukturinformationen zurückgreifen — im Zweidimensionalen die Wirbelstärkenerhaltung, im Dreidimensionalen bleibt es offen.

Die Erwartung, dass Euler- oder Navier–Stokes-Flüsse Singularitäten entwickeln, ist aber in der Fachwelt weit verbreitet. Ein Grund hierfür hängt mit der *kumulativen Energiedissipation*

$$\nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \quad (11)$$

zusammen. Wie wir im Anhang B.1 zeigen, misst sie die kinetische Energie, die im Zeitintervall $[0, t]$ durch Reibung verloren geht. Eigentlich würde man erwarten, dass diese Größe stetig von der Viskosität ν abhängt. Nun sprechen aber numerische und experimentelle Daten stark dafür, dass die kumulative Energiedissipation nicht verschwindet, wenn ν gegen Null geht. Man bezeichnet dieses Verhalten als *anormale Dissipation* [7]; die meisten Turbulenztheorien setzen es als gegeben voraus. Mathematisch bedeutet anormale Dissipation, dass typische Lösungen der Euler-Gleichungen nicht glatt sein können. Dies impliziert zwar nicht zwingend Singularitäten auch in Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen, aber es spricht einiges dafür. Nehmen wir nämlich an, nur Lösungen der Euler-Gleichungen würden nach endlicher Zeit singulär, dann müsste der Regularisierungsmechanismus essentiell mit dem Reibungsterm zusammenhängen. Dieser ist aber als linearer Operator sehr gut verstanden und nach allem was wir wissen nicht stark genug, um der Nichtlinearität Einhalt zu gebieten. (So gibt etwa L.N. Trefethen in [18] ein nachvollziehbares Beispiel, wie der Diffusionsterm gegen eine Nichtlinearität verliert.)

Auf der anderen Seite der Debatte gibt es Stimmen, die die globale Regularität der Euler- und Navier–Stokes-Gleichungen erwarten, und zwar aus zwei Gründen. Zunächst lassen bisherige Computerberechnungen trotz allem Aufwands keine eindeutigen Schlüsse zu. Verfechter beider Ansichten können zwar sich auf Simulationen stützen [3, 11, 13, 15], jedoch kann bisher niemand eine robuste Beschreibung einer Singularität bieten, wie sie für andere Modelle zum wissenschaftlichen „State-of-the-Art“ gehört. Zum zweiten ist nicht klar, welche Physik den Gleichungen überhaupt fehlen sollte (so man denn die Kontinuumsbeschreibung als „physikalisch“ akzeptiert). Hierfür spricht insbesondere der weithin überzeugende Erfolg der Navier–Stokes-Gleichungen als empirische Theorie.

6 Wirbelschläuche als Testfall

Wir wollen nun die Rolle von Computersimulationen zur Lösung des Singularitätsproblems diskutieren. Simulationen sind Experimente wie in einem wirklichen Labor; sie müssen ebenso sorgfältig geplant werden, um mit der

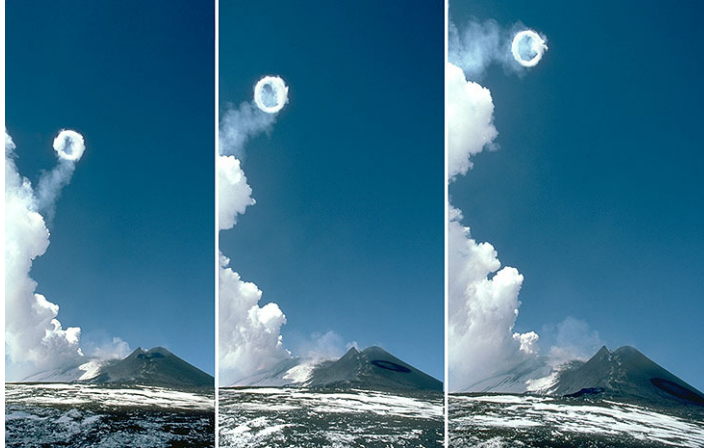


Abbildung 3. Bei einer Eruption des Südostkraters des Vulkans Ätna im Jahr 2000 ausgestoßener Rauchring, der sich selbstinduziert fortbewegt. Man beachte, wie der Schatten des Rings über den Hang des Bergs wandert. Photos von Juerg Alean auf <http://www.swisseduc.ch/stromboli/etna/etna00/etna0002photovideo-en.html?id=4>.

verfügbaren Hardware und Algorithmik den maximalen Erkenntnisgewinn zu erzielen.

Um Singularitäten zu finden, benötigen wir Anfangskonfigurationen, aus denen sich ein lokal extrem schneller Fluss entwickelt. Wir können dann nach Indizien für das Entstehen einer Singularität oder nach Anzeichen für ein Nachlassen der nichtlinearen Rückkopplung suchen. Die ersten Experimente dieser Art benutzten zufällige Anfangsdaten. Man bemerkte aber schnell, dass Höchstgeschwindigkeiten meist innerhalb von *Wirbelschläuchen* auftreten. Wirbelschläuche sind röhrenartige Strukturen, die sich um ihre Symmetrieachse drehen. Sie werden auch in der Natur oft beobachtet, etwa als Tornados oder Mesozyklone bei starken Gewittern. Normalerweise ist es nicht einfach, Wirbelschläuche zu sehen. Manchmal führt der im Kern niedrige Druck dort zu Kondensation, in Laborversuchen kann man Wirbelschläuche auch durch hereingesaugte Blasen oder injizierte Farbe sichtbar machen.

Zwei weitere Beobachtungen sind durch Simulation und Experiment ebenfalls gut belegt. Wirbel in turbulenten Strömungen verstärken sich durch Streckung in Richtung der Rotationachse, so wie im Gedankenexperiment bei dem sich drehenden Ballon im Abschnitt 3. Und die heftigsten, wenn auch seltenen Ereignisse entstehen regelmäßig beim Zerfall von zwei parallelen, sich entgegengesetzt drehenden („antiparallelen“) Wirbelschläuchen. Daher nimmt man solche Paare gerne als Anfangsdaten und versucht, durch Einbringen gezielter Störungen möglichst singuläres Verhalten auszulösen [15]. Eine Alternative sind glatte, hochsymmetrischen Anfangsdaten, die in hoch auflösenden Simulationen auf scheinbar ähnliche Weise zusammenbrechen



Abbildung 4. Wirbel an den Flügelspitzen einer Boeing 727, ein Indiz für die um die Flügel herrschende Zirkulation, die für die Erzeugung von Auftrieb notwendig ist. Die Wirbel wurden durch Rauchgeneratoren an den Flügelspitzen sichtbar gemacht. (NASA-Fotografie ECN-3831.)



Abbildung 5. Zerfall der Wirbelschleppen eines Flugzeuges durch die sogenannte Crow-Instabilität, die durch Wechselwirkung der Wirbel mit den Kondensstreifen der Düsenabgase sichtbar wird. Die untere Hälfte des Bilds setzt die obere Hälfte rechts fort. Aus http://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Crow_Instability.jpg.

[11]. Simulationen mit Zufallsdaten spielen bei Untersuchungen zur statistischen Turbulenztheorie weiterhin eine große Rolle; zur Erkundung der lokalen Struktur möglicher Singularitäten sind sie aber zu „verrauscht“.

In einer Strömung ohne Reibung bewegen sich zwei vollständig gerade antiparallele Wirbelschläuche mit konstanter Geschwindigkeit in Normalenrichtung zu der durch ihre Achsen aufgespannten Ebene fort (vergl. Abbildung 6). Diese selbstinduzierte Fortbewegung findet man ähnlich bei Wirbelringen, die man als Rauchringe gut beobachten kann. Durch die Rotation des Ringes wird Fluid durch seine Mitte gesaugt und zieht den Ring mit; siehe Abbildung 3. Ein weiteres Beispiel sind die von den Flügelspitzen ei-

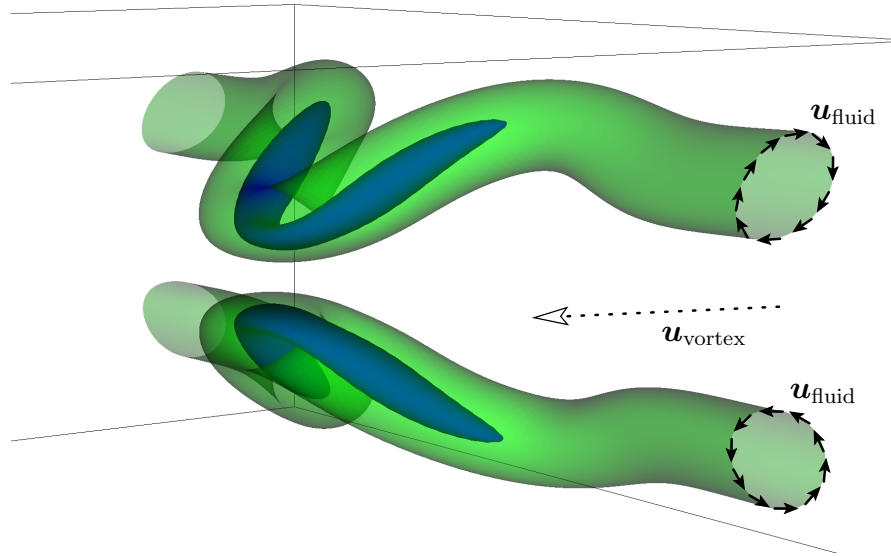


Abbildung 6. Zwei antiparallele Wirbelschläuche. Die reale Strömungsgeschwindigkeit ist als $\mathbf{u}_{\text{fluid}}$ eingezeichnet, die Richtung, in die sich die Wirbelstruktur scheinbar fortbewegt als $\mathbf{u}_{\text{vortex}}$. Die farbigen Oberflächen entsprechen einer Wirbelstärkenstärke von 60% bzw. 90% des Maximalwertes. Aus [3].

nes Flugzeuges ausgehenden Wirbelschleppen. Manchmal sind sie in tieferen Luftschichten als Kondensationsstreifen sichtbar, da Wasserdampf durch den Druck- und Temperaturabfall im Kern kondensiert; man kann sie auch, wie in der in Abbildung 4 gezeigten NASA-Untersuchung, mit künstlichem Rauch sichtbar machen. (Die Streifen, die man fast überall alltäglich am Himmel sieht, entstehen durch Kondensation der Triebwerksabgase; sie werden nach einiger Zeit ebenfalls in die Wirbelschleppen der Flügel eingesogen.) Im weiteren Verlauf setzt die sogenannte Crow-Instabilität ein; siehe Abbildung 5. Die röhrenartigen Strukturen verbiegen sich und beginnen, sich gegenseitig anzuziehen. An manchen Stellen berühren sich die beiden Stränge und rekombinieren. Schließlich löst sich die Struktur in kleinskaliger Turbulenz auf.

Den Mechanismus der Crow-Instabilität kann man ansatzweise folgendermaßen verstehen. Stellen wir uns vor, dass wir ein Paar exakt paralleler Wirbelschläuche leicht stören, so dass beide Röhren etwas entlang ihrer Achse gestreckt werden. Ist die Strömung inkompressibel, muss sie dies durch Kompression in den beiden senkrecht zur Achse stehenden Richtungen kompensieren. Die Röhren werden länger und dünner, fast wie wenn man Kaugummi lang zieht, und bewegen sich aufeinander zu; siehe Abbildung 6. Dieser Vorgang unterliegt einer positiven Rückkopplung und führt so sehr schnell zu flachen, daher kleinskaligen Strukturen wie in Abbildung 7. Gleichzeitig steigen Komplexitätsindikatoren, insbesondere Wirbelstärke und Druckgra-

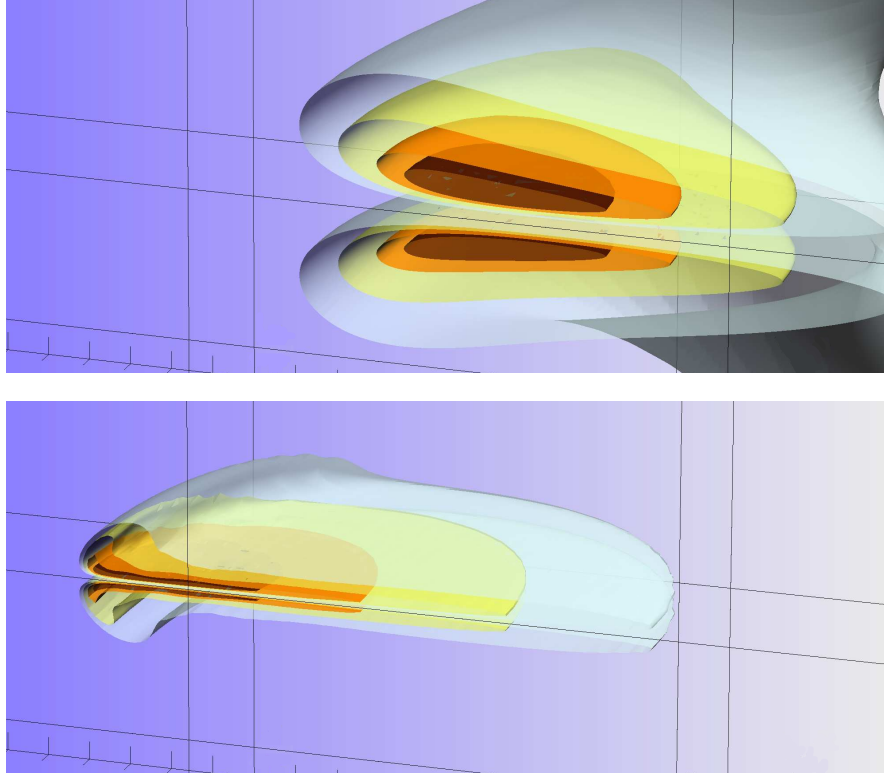


Abbildung 7. Kollaps zweier antiparalleler Wirbelschläuche. Gezeigt sind Momentaufnahmen zu $t = 5.6$ und $t = 8.1$ bei einer vermuteten Singularitätszeit $T^* \approx 11$. Aus [3].

dient rasch an. Was dann passiert, ist die eigentliche Frage: setzt sich dieser Prozess selbstverstärkend fort oder gibt es Sättigungseffekte, die mögliche Singularitäten durch Abstoßung oder Auflösung der Wirbel verhindern? Abhängig von den Anfangsbedingungen und, mysteriöserweise, vom Fortschritt der Zeitentwicklung wurden beide Tendenzen beobachtet.

7 Numerische Fehler

In manchen Gebieten der Mathematik wie Zahlentheorie oder diskrete Mathematik können Computerprogramme die mathematischen Strukturen exakt repräsentieren und so etwa Beispiele oder Gegenbeispiele finden. Teilweise sind sogar computergestützte Beweise möglich. Im Gegensatz dazu spielt die Strömungsmechanik in einem Raumzeitkontinuum, dem sich ein Computerprogramm bestenfalls auf einem Raumzeitgitter mit Gleitkommazahlen end-

licher Genauigkeit nähern kann. Daher ist es prinzipiell unmöglich, mithilfe eines Computers zu *beweisen*, dass die Euler- oder Navier–Stokes-Gleichungen wohlgestellt sind. (Wüssten wir dies bereits, so könnten wir andersherum zeigen, dass mit hinreichend hohem Rechenaufwand der Rechenfehler beliebig klein wird.) Trotzdem können wir im Zusammenspiel zwischen Numerik und mathematischer Analysis unser Verständnis des Singularitätsproblems erweitern: Simulationen können etwa neue Vermutungen inspirieren, Erwartungen bestätigen oder die Eigenschaften von Ungleichungen testen.

In der Strömungsmechanik gibt es eine Vielzahl numerischer Näherungsmethoden, jede mit spezifischen Vor- und Nachteilen. So benutzen Ingenieure meist adaptive Verfahren, die das Berechnungsgitter in den interessantesten Teilgebieten automatisch verfeinern. Für Prinzipstudien kann man aber auch Anfangsdaten suchen, die ein vorgegebenes Gitter optimal ausnutzen, auf dem dann einfache wie schnelle Verfahren, etwa die in Anhang C vorgestellten Spektralmethoden, zur Anwendung kommen.

Unabhängig von der Wahl des Verfahrens wird die Strömung in der Nähe einer Singularität immer kleinskalige Strukturen ausbilden, die dann nicht mehr mithilfe einer vorgegebenen endlichen Anzahl von Freiheitsgraden repräsentiert werden können. Es entstehen Rechenfehler, die sich mit der Zeit aufschaukeln, so dass es unabdingbar ist, die Genauigkeit einer numerischen Rechnung sorgfältig zu kontrollieren. Die beste Kontrolle besteht im Prinzip darin, die Rechnung auf immer feineren Gittern zu wiederholen. Hierfür benötigt man jedoch immer größere Computer, was natürlich in der Praxis unmöglich ist. Man begnügt sich daher normalerweise damit, Erhaltungsgrößen zu überprüfen und in einigen wenigen Rechnungen auf verfeinerten Gittern nach starkem Wachstum kleinskaliger Strukturen zu suchen. Wenn man hierbei vorsichtig vorgeht, kann man die Qualität der Simulation recht gut abschätzen.

Die Validierung numerischer Ergebnisse wird also einfacher, wenn die Gleichungen Symmetrien und Erhaltungsgrößen besitzen. Aus diesem Grund wird die numerische Suche nach Strömungssingularitäten bevorzugt an den Eulergleichungen durchgeführt. (Es kommt hinzu, dass sich der ebenfalls nicht vollständig verstandene Mechanismus der Wirbelstreckung vermutlich leichter ohne Reibungswechselwirkungen beschreiben und verstehen lässt.)

Ob eine so validierte Rechnung potentiell singuläres Verhalten zeigt, ist eine zweite, diffizilere Frage. Das wichtigste Kriterium hierfür ist die Beale–Kato–Majda-Schranke für die Euler-Gleichungen [1], die besagt, dass

$$\int_0^{T^*} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)| \, dt = \infty \quad (12)$$

hinreichend und notwendig für eine Singularität zur Zeit T^* ist. Dieses Kriterium ist aus zwei Gründen wichtig. Erstens erlaubt es uns abzuschätzen, wie schnell sich eine Singularität ausbildet: Die maximale Wirbelstärke muss mindestens wie $(T^* - t)^{-1}$ divergieren. Zweitens ergibt sich aus dem Beweis, dass

höheren Ableitungen der Geschwindigkeit nur dann singulär werden können, wenn die Wirbelstärke selbst divergiert. Als erste Ableitung der Geschwindigkeit lässt sich diese meist noch zuverlässig berechnen.

Mit der Veröffentlichung dieses Tests im Jahr 1984 begann ein Jahrzehnt intensiver Bemühungen, entweder singuläre Lösungen zu finden oder Mechanismen zu identifizieren, die Singularitäten ausschließen. Im Ergebnis stand mindestens eine Simulation [14], die mit der Entwicklung einer durch ein Potenzgesetz beschriebenen Singularität einigermaßen im Einklang steht und hinreichende Auflösung in allen drei Raumrichtungen aufweist. Andererseits ist ebenso klar geworden, dass das Beale–Kato–Majda-Kriterium nicht ausreicht, um zu einer eindeutigen Interpretation der Simulationsdaten zu gelangen. Die wissenschaftliche Debatte ging damit in die nächste Runde: es wurden weitere unabhängige Singularitätskriterien vorgeschlagen, die ebenfalls der praktischen Berechnung zugänglich sind [2, 5, 13, 16]. Bisher reichte die Qualität der Simulationsdaten allerdings nicht aus, um Konsistenz mit diesen mathematischen Schranken zweifelsfrei belegen zu können. Im zweiten Jahrzehnt des 21. Jahrhunderts besteht aber, vielleicht erstmalig, durch konzertierten Einsatz moderner Hochleistungsrechner, den besten adaptiven Gittermethoden und weiterer, eventuell algorithmischer Optimierung der Anfangsdaten die Möglichkeit, Vermutungen über Potenzgesetze bei der Ausbildung von Singularitäten zuverlässig — wenn auch nicht im Sinne eines mathematischen Beweises — verifizieren zu können, oder aber negative Rückkopplungseffekte, die das Ausbilden von Singularitäten unterdrücken, klar zu identifizieren und zu beschreiben.

8 Eine Einladung zur Forschung

Neue Singularitätskriterien würden uns enorm weiterbringen — sowohl besonders robuste als auch besonders raffinierte. Numerisch robuste Tests würden nur von Integralen oder Mitteln abhängen. Ein vielversprechender Kandidat könnte die Enstrophie, das Integral über das Quadrat der Wirbelstärke definiert, sein, obwohl es hierfür nach gegenwärtigem Verständnis keine theoretischen Basis gibt. In [3] scheint die Euler-Enstrophie etwa einem Potenzgesetz zu folgen, das zu der besten bekannten oberen Schranke für ihr Wachstum in den Navier–Stokes-Gleichungen passt. Ob dies Zufall ist oder ein tieferer Zusammenhang besteht, steht noch in den Sternen. Raffiniere Kriterien könnten explizit auf die lokale Geometrie von Wirbellinien und -strukturen eingehen.

Die Beziehung zwischen Euler- und Navier–Stokes-Gleichungen ist bis heute noch nicht vollständig klar. So verstehen wir etwa den Grenzwert verschwindender Viskosität in Gebieten mit Rändern, in deren Nähe sich Grenzschichten bilden, noch immer nicht genau [2]. Außerdem bleibt es ein Rätsel, ob ein Beweis globaler Regularität für die Euler-Gleichungen auch Regularität

der Navier–Stokes-Gleichung impliziert, wie man naiv annehmen könnte, da Reibung die Bildung von Singularitäten noch zusätzlich ausbremsen sollte [5]. Grundsätzlich sind wir der Ansicht, dass ein wissenschaftlicher Durchbruch zum Navier–Stokes-Problem einen Durchbruch beim Euler-Problem voraussetzt — auf der mathematischen Seite, weil die Navier–Stokes-Reibung zwar gut verstanden ist, wir aber nicht wissen, wie sie die Nichtlinearität kontrollieren sollte, auf der numerischen Seite, weil die Qualität von Euler-Simulationen über ihre Erhaltungsgrößen viel zuverlässiger kontrolliert werden kann.

Unabhängig von diesen schwierigen Fragen lohnt es sich immer, Ideen an kleineren Beispielproblemen zu entwickeln, die man vielleicht später auf die dreidimensionalen Navier–Stokes- und Euler-Gleichungen übertragen kann. Oft ist es möglich, Existenz oder Ausbleiben von Singularitäten numerisch vorherzusagen. Die hierfür benutzten Spezialfälle, oft das Ergebnis endloser numerischer Experimente, bilden die Inspiration für neue mathematische Methoden, um die Numerik rigoros zu bestätigen.

In praktischen Anwendungen kann man die rechnerisch nicht mehr auflösbaren Skalen oft „modellieren“. In „Large Eddy“- oder Grobstruktursimulationen wird etwa der Reibungsterm der Navier–Stokes-Gleichungen durch eine sogenannte Eddy-Viskosität ersetzt, die den durchschnittlichen Effekt der Reibung über eine Berechnungszelle darstellt. Für globale Wettervorhersagen müssen so fast alle Skalen modelliert werden. Ziel der Grobstruktursimulation ist, die wesentlichen statistischen Eigenschaften der Lösung korrekt zu repräsentieren. Die mathematische Untersuchung solcher Methoden ist jedoch erst am Anfang. Dabei muss insbesondere ein Genauigkeitsbegriff entwickelt werden, der dem Übergang von deterministischer Genauigkeit auf makroskopischen Skalen in einen schwächeren statistischen Sinn von Genauigkeit auf kleinen Skalen Rechnung trägt.

Wir hoffen, trotz der notwenig beschränkten Detailtiefe dem Leser einen Eindruck verschafft zu haben, wie sich die mathematische Strömungsmechanik (und allgemeiner, die Theorie partieller Differentialgleichungen) im Zusammenspiel von Analysis, Physik und Informatik weiterentwickelt. Komplizierte Mathematik geht fließend in anwendungsorientierte Probleme über. Und an diesem Punkt in seiner langen Geschichte ist das Gebiet legendärer denn je.

Anhang A. Im Schnellschritt durch die Vektoranalysis

Für Funktionen einer Veränderlichen ist die *lokale Änderungsrate*, die Steigung, durch die Ableitung $f' = df/dx$ gegeben. Die lokale Änderungsrate hängt mit der globalen Änderung $f(b) - f(a)$ auf einem Intervall $[a, b]$ über den Fundamentalsatz der Differenzial- und Integralrechnung zusammen. In der Strömungsmechanik treten nun Funktionen mehrerer Veränderlicher auf, für die wir analoge Konzepte benötigen. Lokale Änderungsraten werden hier

durch Richtungsableitungen beschrieben, mit deren Hilfe wir vier elementare Differentialoperatoren definieren — Gradient, Divergenz, Rotation und den Laplace-Operator. Genau wie im Eindimensionalen besteht ein Zusammenhang zwischen lokalen Änderungsraten und globalen Eigenschaften einer Funktion über die Sätze von Gauß und Stokes. Im Folgenden stellen wir diese Konzepte informell und ohne Beweise vor, wobei wir Grundkenntnisse der eindimensionalen Analysis und der analytischen Geometrie voraussetzen. Eine umfassendere und mathematisch vollständige Darstellung findet sich in zahllosen Büchern und Beiträgen im Internet. Es lohnt sich, zu stöbern!

A.1 Richtungsableitung, Gradient und Kettenregel

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ein ausgezeichneter Punkt. (Fettgedruckte Symbole bezeichnen Vektoren oder vektorwertige Funktionen; normal gedruckte Symbole sind Skalaren oder skalarwertigen Funktionen vorbehalten.) Wir können nun eine lokale Änderungsrate (oder Steigung) von f definieren, indem wir das Argument von f in Richtung eines Vektors $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ variieren. Dies ist aber gerade die gewohnte Ableitung der Funktion $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ einer Veränderlichen, die für kleine t wohldefiniert ist. Diese lokale Änderungsrate

$$\left. \frac{df(\mathbf{x} + t\mathbf{v})}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}, \quad (13)$$

falls sie existiert, bezeichnet man als *Richtungsableitung* von f am Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{v}$.⁷

Die Richtungsableitung in Richtung des i -ten Einheitsvektors bezeichnet man als die i -te *partielle Ableitung*. Für sie schreibt man kurz $\partial f / \partial x_i$ oder $\partial_i f$. Man kann sie berechnen, indem man die gewohnte Ableitung von f bezüglich der Komponente x_i bestimmt und alle anderen Komponenten von $\mathbf{x}$ als konstant betrachtet.

Wir können die lokale Änderungsrate von f natürlich nicht nur entlang einer Geraden wie in (13) sondern auch entlang einer beliebigen glatten Kurve berechnen, die durch eine Funktion $\phi: (a, b) \rightarrow U$ parametrisiert sei. Bezeichnen wir die Vektorkomponenten von ϕ mit $\phi_1, \dots, \phi_n$, so berechnet man die Änderungsrate entlang der parametrisierten Kurve mit der mehrdimensionalen *Kettenregel*

$$\frac{d}{dt} f(\phi(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{d\phi_i(t)}{dt} \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\phi(t)}. \quad (14)$$

Die Summe in diesem Ausdruck kann als Skalarprodukt zwischen $d\phi/dt = (d\phi_1/dt, \dots, d\phi_n/dt)$, der Geschwindigkeit eines sich entlang der Kurve bewegenden Punktes, und dem Vektor der partiellen Ableitungen

⁷ Der vertikale Strich in (13) wie auch später bedeutet, dass zunächst die Ableitung ausgerechnet und dann der angegebene Wert eingesetzt wird.

$$\nabla f \equiv (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n), \quad (15)$$

dem *Gradienten* von f , schreiben. Mit der bekannten Punktnotation für Skalarprodukte $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ schreibt man die Kettenregel (14) kurz

$$\frac{d}{dt} f(\phi(t)) = \frac{d\phi(t)}{dt} \cdot \nabla f|_{\mathbf{x}=\phi(t)}. \quad (16)$$

Diese Form erinnert an die Kettenregel $(f(\phi(t)))' = \phi'(t) f'(\phi(t))$ für Funktionen einer Veränderlichen. Im mehrdimensionalen Fall ergibt sich also die lokale Änderungsrate als Summe der partiellen Änderungsraten in jede Raumrichtung.

Wenden wir die Kettenregel mit $\phi(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$ an, dann ist $d\phi/dt = \mathbf{v}$ und wir stellen fest, dass die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v}$ durch den Ausdruck $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ gegeben ist. Damit ist bei festgehaltener Länge von $\mathbf{v}$ die Richtungsableitung $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ genau dann maximal, wenn $\mathbf{v}$ und ∇f parallel sind. Der Gradient ist also der Vektor, der in Richtung des stärksten Anstiegs von f zeigt und dessen Länge der Steigung von f in dieser Richtung entspricht. In der Praxis ist es oft bequem, ∇ als Vektor von Ableitungssymbolen formal zu manipulieren, so dass man z.B. den Ausdruck $\mathbf{v} \cdot \nabla$ als „Richtungsableitungsoperator“ in Richtung $\mathbf{v}$ lesen kann.

Ein *Vektorfeld* ist eine Funktion $\mathbf{u}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, die jedem $\mathbf{x} \in U$ einen Vektor zuweist. So besitzt etwa eine Strömung an jedem Punkt einen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Wir können Richtungsableitungen auch für Vektorfelder definieren, indem wir jede Komponente einzeln ableiten, d.h. $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = (\mathbf{v} \cdot \nabla u_1, \dots, \mathbf{v} \cdot \nabla u_n)$.

In der Strömungsmechanik treten oft zeitabhängige Funktionen und Vektorfelder auf, so dass wir die Ortsvariablen von der Zeit unterscheiden müssen. Wir schreiben üblicherweise $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ (normalerweise $d = 2$ oder $d = 3$), um einen Ort in der Strömung und $t \in (a, b)$, um einen Punkt in der Zeit zu bezeichnen. Entsprechend bezeichnet $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$ den auf die Ortsvariablen beschränkten Gradienten und ∂_t die partielle Ableitung nach der Zeit.

Die Kettenregel (14) für eine Funktion $f: \Omega \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\psi: (a, b) \rightarrow \Omega$ mit $n = d + 1$ lautet dann

$$\frac{d}{dt} f(\psi(t), t) = \partial_t f|_{\mathbf{x}=\psi(t)} + \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \nabla f|_{\mathbf{x}=\psi(t)}. \quad (17)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Beitrag zur Änderungsrate von f , der direkt auf die Zeitabhängigkeit von f zurückgeht. Der zweite Term beschreibt den Beitrag zur Änderungsrate, der von der gleichzeitigen Bewegung entlang der Kurve ψ herrührt. Diese Form der Kettenregel ist ein Spezialfall von (16): Setze $U = \Omega \times (a, b)$ und $\phi(t) = (\psi(t), t)$, also $d\phi(t)/dt = (d\psi_1(t)/dt, \dots, d\psi_d(t)/dt, 1)$. Der Vektor der partiellen Ableitungen von f ist dann $(\partial_1 f, \dots, \partial_d f, \partial_t f) = (\nabla f, \partial_t f)$.

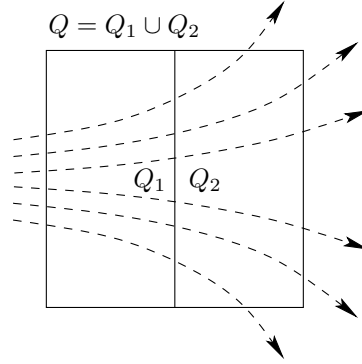
A.2 Quellenstärke und Divergenz eines Vektorfelds

Für ein gegebenes Teilgebiet, etwa einen kleinen Quader Q mit Rand S , sei der *Fluss* von $\mathbf{u}$ aus Q durch das Oberflächenintegral

$$\text{Fl} = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \quad (18)$$

definiert.⁸ Dieses Integral können wir uns als (Riemann-)Summe über die auf dem dem Rand S senkrecht stehenden Anteile von $\mathbf{u}$ vorstellen. Es misst das Strömungsvolumen, das S pro Einheitszeit netto durchfließt.

Unterteilen wir Q in zwei Teilgebiete Q_1 und Q_2 , so ist der Fluss aus Q die Summe der Flüsse aus Q_1 und Q_2 , da sich die Flüsse über den gemeinsamen Rand gerade aufheben. Durch weitere Unterteilung können wir den Fluss als Summe von Beiträgen immer kleinerer Teilgebiete schreiben. Schließlich sei die *Divergenz* $\text{div } \mathbf{u}$ von $\mathbf{u}$ im Punkt $\mathbf{x}$ der Fluss aus Q geteilt durch das Volumen von Q im Grenzwert immer kleinerer $\mathbf{x}$ enthaltender Teilgebiete Q . Die Divergenz misst also den Fluss pro Volumen, damit die Entstehungsrate des Strömungsvolumens pro Volumen, und wird deshalb als „Quellendichte“ oder „Quellenstärke“ bezeichnet. Aus diesem Zusammenhang folgt sofort, dass der Fluss aus Q das Volumenintegral der Quellenstärke über Q ist. Symbolisch schreiben wir



$$\int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int_Q \text{div } \mathbf{u} \, d\mathbf{x}. \quad (19)$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als *Gaußschen Divergenzsatz*. Auf einem quaderförmigen Gebiet zeigt dann eine einfache Rechnung, dass

$$\text{div } \mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \cdots + \partial_n u_n; \quad (20)$$

symbolisch schreibt man auch $\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$. (Üblicherweise definiert man die Divergenz durch (20) und muss dann den Gaußschen Divergenzsatz beweisen. Anschaulicher ist es jedoch, wie hier ausgeführt, genau andersherum.)

Gilt $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{x}) > 0$ an einem Punkt $\mathbf{x}$, so besagt der Satz von Gauß insbesondere, dass mehr Strömungsvolumen aus einem kleinen Gebiet um $\mathbf{x}$

⁸ Nicht zu verwechseln mit der Flussabbildung Φ_t , die man ebenfalls oft kurz als Fluss bezeichnet.

heraus- als hereinfließt. Es gibt also eine „Quelle“ bei $\mathbf{x}$ — das Fluid dehnt sich aus. Ist andererseits $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) < 0$, so fließt mehr Strömungsvolumen herein als heraus — das Fluid zieht sich zusammen. Ist überall $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, so heben sich die Volumenflüsse in beide Richtungen stets auf — die Strömung ist volumenerhaltend.

A.3 Abweichungen vom Mittel und der Laplace-Operator

Der Laplace-Operator misst, wie stark der Wert einer reellwertigen Funktion f in n Veränderlichen an einem Punkt $\mathbf{x}$ vom Mittel von f über kleine Kugelschalen um $\mathbf{x}$ abweicht: Sei $S_\varepsilon(\mathbf{x})$ die Kugel mit Radius ε mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ und $\operatorname{Av}(f, S_\varepsilon(\mathbf{x}))$ der Mittelwert von f über diese Kugel. Dann definieren wir

$$\Delta f = 2n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Av}(f, S_\varepsilon(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon^2}. \quad (21)$$

Nach einiger Rechnung, die auf dem Gaußschen Divergenzsatz basiert, kann man den Laplace-Operator als Differentialoperator identifizieren, nämlich

$$\Delta f = \partial_1 \partial_1 f + \cdots + \partial_n \partial_n f. \quad (22)$$

Symbolisch schreiben wir $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$; den Laplace-Operator für Vektorfelder definieren wir wieder komponentenweise durch $\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n)$.

Im eindimensionalen Fall ist die Äquivalenz von (21) und (22) elementar zu verstehen: Betrachte die affine Funktion $f(x) = ax + b$, so dass $d^2 f/dx^2 = 0$ und $f(x) = (f(x - \varepsilon) + f(x + \varepsilon))/2$. Also ist $f(x)$ der Mittelwert aller Funktionswerte an Punkten, die Abstand ε von x haben; wir schreiben $f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x) = 0$. Für nichtaffine f stimmt dies natürlich nicht, es gilt aber im Grenzfall dass

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x)}{\varepsilon^2}. \quad (23)$$

Dieser Ausdruck entspricht genau (21) mit $n = 1$.

A.4 Zirkulation und Rotation eines Vektorfelds

Unser letzter Differentialoperator, die Rotation, lässt sich am leichtesten in Dimension 3 einführen. Benutzt man jedoch die elegante, aber abstraktere Theorie der Differentialformen, kann man ihn auch verallgemeinern; zudem reduzieren sich dann die Sätze von Gauß (19) und Stokes (wird noch eingeführt) auf eine einfache gemeinsame Form.

Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Kurve, die durch $\mathbf{s}: [a, b] \rightarrow C$ parametrisiert wird. Die Kurve sei *geschlossen*, also $\mathbf{s}(a) = \mathbf{s}(b)$. Zudem sei angenommen, dass die Parametrisierung die Kurve genau einmal durchläuft. Wir definieren dann die *Zirkulation* von $\mathbf{u}$ entlang C als Kurvenintegral

$$\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{u}(\mathbf{s}(r)) \cdot \mathbf{s}'(r) dr. \quad (24)$$

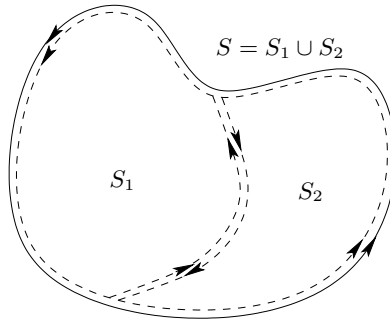
(Der kleine Kreis im linken Integralzeichen bedeutet, dass die Integrationskurve geschlossen ist.) Das Kurvenintegral können wir uns als (Riemann-) Summe über die Tangentialkomponenten von $\mathbf{u}$ entlang C vorstellen; man zeigt leicht, dass es nicht von der gewählten Parametrisierung abhängt. Die Zirkulation misst also die Stärke einer Strömung entlang der Kurve C . (Lässt man z.B. Wasser aus einer Wanne ab, so bildet sich meist eine Strömung mit starker Zirkulation um den Abfluss.)

Wir nehmen nun an, C sei der Rand einer Fläche S , so dass wir (24) auch als „Zirkulation um S “ verstehen können. Was passiert nun, wenn wir S in zwei Teilflächen S_1 und S_2 aufteilen? Berechnen wir die Zirkulation um S_1 und S_2 getrennt, so durchqueren wir die gemeinsame Randkurve im inneren von S zweimal, aber in entgegengesetzter Richtung. In der Summe heben sich diese Beiträge zur Gesamtzirkulation also auf und es bleibt nur der Beitrag des Randes von S . Wir können somit durch immer feinere Unterteilungen immer genauer bestimmen, welcher Teil der Fläche wie viel zur Zirkulation beiträgt. In diesem Grenzprozess werden die Flächenelemente relativ zu ihrer Größe immer planer, so dass der Grenzwert schließlich die Zirkulation pro Fläche für ein ebenes Flächenelement beschreibt. Entsprechend definiert die Gesamtheit dieser Grenzwerte ein Vektorfeld $\text{rot } \mathbf{u}$, die *Rotation* von $\mathbf{u}$, auf folgende Weise: die am Punkt $\mathbf{x}$ senkrecht auf einer Ebene P stehende Komponente von $\text{rot } \mathbf{u}$ ist genau die Zirkulation von $\mathbf{u}$ um eine kleine $\mathbf{x}$ enthaltende Fläche $S \subset P$ geteilt durch den Flächeninhalt von S im Grenzwert, dass dieser gegen Null geht. Daher gilt

$$\int_S \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}, \quad (25)$$

wobei das linke Integral der Fluss von $\text{rot } \mathbf{u}$ durch die Fläche S ist. Diese Identität ist als *Satz von Stokes* bekannt. Um die drei Komponenten der Rotation zu bestimmen, reicht es, den Grenzwert der Zirkulation pro Fläche in den drei Koordinatenebenen zu bilden. Eine Rechnung, die im Detail dem Leser angetragen sei, liefert

$$\text{rot } \mathbf{u} = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1), \quad (26)$$



was man symbolisch auch als Kreuzprodukt $\nabla \times \mathbf{u}$ schreibt. Ist $\mathbf{u}$ das Geschwindigkeitsfeld eines Fluids, so bezeichnet man $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ als *Wirbelstärke*. So beschreibt ihre dritte Komponente etwa, wie stark die Strömung eingeschränkt auf die (x_1, x_2) -Ebene um die Achse durch $\mathbf{x}$ in x_3 -Richtung rotiert.

Anhang B. Energieabschätzungen

Wir leiten nun einfache Abschätzungen für glatte Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen mit periodischen Randbedingungen her, die in prinzipieller Hinsicht den besten bekannten Schranken bemerkenswert nahe kommen. Das erste Resultat ist eine Energiebilanzgleichung, die besagt, dass die Gesamtenergie für Lösungen der Euler-Gleichungen konstant und für Lösungen der Navier–Stokes-Gleichungen monoton fallend ist. Ein zweites Resultat liefert Schranken für Ableitungen der Lösung und zeigt, warum es schwer ist, in drei Raumdimensionen Schranken für beliebig lange Zeiten zu finden.

B.1 Die Energie fällt monoton

Wir bilden das Skalarprodukt der Navier–Stokes-Impulsgleichung (6a) mit $\mathbf{u}$ und integrieren über das Gebiet Ω :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p d\mathbf{x} = \nu \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (27)$$

Mit

$$|\mathbf{u}|^2 = \sum_{i=1}^d |u_i|^2 \quad \text{und} \quad |\nabla \mathbf{u}|^2 = \sum_{i,j=1}^d |\partial_i u_j|^2, \quad (28)$$

den Identitäten $\partial |\mathbf{u}|^2 / \partial t = 2 \mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t$ und $\mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 = 2 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ und durch Herausziehen der Zeitableitung aus dem ersten Integral erhalten wir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p d\mathbf{x} = \nu \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (29)$$

Bezeichnet f eine skalarwertige Funktion und $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld, dann ist $\text{div}(f\mathbf{v}) = f \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$. Indem wir nun den Satz von Gauß (19) auf $f\mathbf{v}$ anwenden und beachten, dass das Integral über den Rand auf der linken Seite von (19) verschwindet, da sich die Beiträge gegenüberliegender Seiten dank der periodischen Randbedingung gegenseitig aufheben, so erhalten wir die mehrdimensionale „partielle Integrations-Formel“

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla f d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f \text{div } \mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (30)$$

Wenden wir diese Formel auf den zweiten und dritten Term von (29) an, dann tritt in den resultierenden Integranden jeweils der Faktor $\operatorname{div} \mathbf{u}$ auf, der identisch Null ist. Schreiben wir $\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$, so können wir den letzten Term von (29) ebenfalls mittels (30) partiell integrieren und erhalten insgesamt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = -\nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}. \quad (31)$$

Integration in der Zeit ergibt schließlich die Energiebilanzgleichung

$$E(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t)|^2 d\mathbf{x} = E(0) - \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}(s)|^2 d\mathbf{x} ds. \quad (32)$$

Da der Integrand im letzten Term nichtnegativ ist, kann erstens die Energie E nicht anwachsen und bleibt zweitens die kumulative Energiedissipation (11) durch die Anfangsenergie $E(0)$ beschränkt. Für die Euler-Gleichungen mit $\nu = 0$ ist die Energie eine Erhaltungsgröße, aber es ergibt sich dann keine Schranke für $|\nabla \mathbf{u}|^2$.

B.2 Schranken für Ableitungen

Wir wollen nun mit der Energiebilanzgleichung auch die Ableitungen von $\mathbf{u}$ kontrollieren. Von besonderem Interesse ist dabei eine Schranke für das Ortsintegral von $|\nabla \mathbf{u}|^2$, die punktweise in der Zeit gilt, also stärker ist als das Raum-Zeit-Integral der kumulativen Energiedissipation. Aus einem solchen Resultat kann man Schranken für beliebige Ableitungen mit Standardargumenten herleiten.

Wir bilden also das Skalarprodukt von (6a) mit $\Delta \mathbf{u}$ und integrieren wie zuvor in den Ortskoordinaten, so dass

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \nabla p d\mathbf{x} = \nu \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}. \quad (33)$$

Durch partielle Integration erkennt man, dass der erste Term die negative Zeitableitung des gesuchten Ortsintegrals ist. Der Beitrag des Drucks verschwindet wie vorher. Der zweite Term, der Beitrag der Navier-Stokes-Nichtlinearität, verschwindet jedoch nicht, man kann ihn aber als Summe von Produkten erster Ableitungen schreiben und erhält

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i,j,k=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u_j \partial_i u_k \partial_k u_j d\mathbf{x} = -\nu \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}. \quad (34)$$

Der zweite Term ist kompliziert und wir wissen insbesondere nichts über sein Vorzeichen. Wir können jedoch, wenig subtil, jeden der vorkommenden Gradienten durch seine euklidische Länge abschätzen. Mit $\nu > 0$ und $d = 2, 3$ schätzen wir dann ab wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i,j,k=1}^d \int_{\Omega} \partial_i u_j \partial_i u_k \partial_k u_j \, d\mathbf{x} \right| &\leq \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^3 \, d\mathbf{x} \\
&\leq c_1 \left(\int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{d}{4}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{6-d}{4}} \\
&\leq \nu \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + c_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^d. \quad (35)
\end{aligned}$$

Wobei c_1 und $c_2 = c_2(\nu)$ bekannte Konstanten sind. Der Beweis der zweiten Ungleichung erfordert etwas Rüstzeug aus der mehrdimensionalen Integration; die auftretenden Exponenten sind jedoch notwendig durch die Bedingung festgelegt, dass die physikalischen Einheiten auf beiden Seiten der Ungleichung übereinstimmen müssen. Die dritte Ungleichung in (35) geht auf die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zurück. Insgesamt folgt, dass

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leq c_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \right)^d. \quad (36)$$

Für $d = 2$ kann man einen der Faktoren auf der rechten Seite als Ableitung eines Eulerschen Multiplikators schreiben und (36) so wie eine lineare nichtautonome Differenzialungleichung lösen. Da dieser Multiplikator Dank der Energiebilanzgleichung beschränkt bleibt, erhält man für jedes $t \geq 0$ eine Schranke für das Ortsintegral von $|\nabla \mathbf{u}|^2$. Für $d = 3$ ist die Differentialungleichung (36) jedoch fundamental nichtlinear, so dass die abgeleitete Schranke in endlicher Zeit divergiert. Die aus (32) gewonnenen Schranken für Energie und kumulative Energiedissipation reichen also nicht aus, um das Anwachsen kleinskaliger Strömungsstrukturen zu kontrollieren.

Mit geringfügigen Modifikationen kann man jedoch auch für $d = 3$ globale Schranken herleiten, wenn nur die Anfangsdaten hinreichend klein, die Viskosität hinreichend groß oder die Anfangsdaten den Anfangsdaten einer bekannten globalen Lösung hinreichend ähnlich sind. Durch Weiterbasteln auf dieser Ebene oder Suche nach vielleicht „besseren“ Funktionenräumen können wir jedoch die dimensionsbehaftete Skalierung der Terme der Gleichung nicht ändern und stoßen daher letztendlich immer auf gleichartige Schwierigkeiten. Man sagt, die Gleichung ist „überkritisch“ — die Nichtlinearität ist „stärker“ als die Dissipation. Es gibt auch über die Energiebilanzgleichung hinaus keine weiteren bekannten Erhaltungsgrößen, die als Basis für eine Abschätzungskaskade dienen könnten.

Die beste Chance auf eine schärfere Abschätzung haben wir bereits in der ersten Zeile von (35) verspielt, indem wir jegliche dreidimensionale Richtungsinformation aufgegeben haben. Diese, oder auch die Geometrie der Wirbelstreckung könnten Schlüssel zu neuen Ergebnissen sein. Die Schwierigkeit, solche Informationen nutzbar zu machen, liegt allerdings darin, dass sie sich nicht in der Begrifflichkeit von stetigen und kompakten Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen ausdrücken lassen, die das Grundgerüst der Theorie partieller Differentialgleichungen bildet.

Anhang C. Spektral- und Pseudospektralmethoden

In diesem letzten Anhang stellen wir kurz numerische Spektralverfahren vor, die in der rechnergestützten Grundlagenforschung häufig zum Einsatz kommen. Im Vergleich mit anderen Verfahren sind Spektralmethoden schnell und genau. Sie sind mathematisch einfach zu verstehen, weil auch in der Theorie früher oder später meist Spektralzerlegungen zum Einsatz kommen. Spektralmethoden können ihre Vorteile aber nur auf einfachen, im Wesentlichen quaderförmigen Gebieten ausspielen und lassen sich kaum adaptiv verfeinern, wenn stark lokalisierte Strukturen entstehen, wie es in der Nähe von potentiellen Singularitäten der Fall ist.

Spektralmethoden basieren im einfachsten Fall auf der Fourierzerlegung einer Funktion. So läßt sich z.B. das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}$ unter recht schwachen Annahmen eindeutig durch die *Fourierreihe*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (37)$$

darstellen, wobei wir unser quaderförmiges Gebiet der Einfachheit halber auf den Würfel $\Omega = [0, 2\pi]^d$ skaliert haben. Jeder *Fourierkoeffizient* $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ ist ein d -dimensionaler Vektor aus komplexen Zahlen; den Index $\mathbf{k}$ nennt man *Wellenvektor*, seine Länge *Wellenzahl*. Bilden wir den Gradienten auf beiden Seiten von (37), so sehen wir, dass diesem auf der Fourierseite die Multiplikation mit $i\mathbf{k}$ entspricht:

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} i\mathbf{k} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (38)$$

Nehmen wir an, dass nur die Koeffizienten $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ mit $|\mathbf{k}| < n/2$ für ein festes n von Null verschieden sind, so besteht die Fourierreihe nur aus n^d Summanden und wir erhalten direkt eine numerische Methode, die insbesondere die linearen Terme in (5) und (6) exakt durch algebraische Operationen auf dieser endlichen Menge von Koeffizienten darstellt. Eine erste Schwierigkeit besteht darin, dass eine direkte Auswertung des nichtlinearen Terms in der Fourierdarstellung etwa n^{2d} Operationen benötigt. Das ist verglichen mit der Auswertung der anderen Terme, die nur etwa n^d Operationen benötigt, viel zu aufwändig.

Ein zweites Problem ist, dass sich die Anzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten in jedem Zeitschritt um den Faktor 2^d erhöht. Der Speicherbedarf für eine exakte Berechnung der Nichtlinearität steigt damit exponentiell mit der Zeit. Physikalisch ist das nicht überraschend: In der Zeitentwicklung der Strömung entstehen immer kleinere Strukturen, die nur durch Fourierkoeffizienten mit immer höheren Wellenzahlen repräsentiert werden können. In der Turbulenztheorie spricht man von einer „Kaskade“. Kaskaden sind im Fourierraum einfach zu beschreiben, aber in Ortsraumkoordinaten kaum direkt zu erkennen.

Beide Schwierigkeiten bei der Berechnung des nichtlinearen Terms kann man umgehen, indem man die *diskrete Fouriertransformation* als Bijektion zwischen den n^d Fourierkoeffizienten und n^d Funktionswerten an äquidistanten Gitterpunkten benutzt. Multiplikationen berechnet man dann effizient auf dem räumlichen Gitter, Ableitungen hingegen schnell im Fourierraum. Die Transformation selbst benötigt in Form der *schnellen Fouriertransformation* oder FFT nur etwa $n^d \ln n$ Operationen, und kann so ebenfalls ohne bedeutenden Geschwindigkeitsverlust berechnet werden. Wird die Berechnung auf diese Weise aufgeteilt, spricht man von einem Pseudospektralverfahren.

Sind räumliche Ableitungen und Multiplikation erst einmal geeignet approximiert, dann reduziert sich das Problem auf ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen, dessen Zeitentwicklung mit einer Vielzahl bekannter Methoden numerisch gelöst werden kann.

Es sei noch bemerkt, dass eine pseudospektrale Näherung immer gefiltert werden muss, d.h. Fourierkoeffizienten mit bestimmten hohen Wellenzahlen müssen nach Berechnung der Nichtlinearität auf Null gesetzt werden. Man spricht von „Dealiasing“. Diese Notwendigkeit ergibt sich aus der Nichtäquivalenz von diskreter und kontinuierlicher Fourier-Transformation, die Details würden diesen Beitrag sprengen. Bei einer korrekt gefilterten Rechnung bleiben quadratische Erhaltungsgrößen wie die Energie der Eulergleichungen konstant. Trotzdem entstehen natürlich Fehler auf Gitterskalen, also in den abgeschnittenen Fourierkoeffizienten, und in nichtquadratischen Erhaltungsgrößen wie der Zirkulation, so dass wir hierdurch wiederum die Genauigkeit der Berechnung überprüfen können [3, 11, 15].

Letztendlich erfordert eine höhere Genauigkeit mehr Ressourcen, also erneute Berechnungen auf feineren Gittern. Praktisch bedeutet dies, dass wir für Simulationen an der Grenze der verfügbaren Auflösung sowohl die Eigenschaften des gewählten numerischen Verfahrens als auch die Eigenschaften der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichung gut verstehen müssen. Davon losgelöst ist oft die mathematische Untersuchung des numerischen Verfahrens an sich sinnvoll und interessant.

Literatur

- [1] J. Thomas Beale, Tosio Kato und Andrew J. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*. Communications in Mathematical Physics **94** (1984), 61–66.
- [2] Claude Bardos und Edriss S. Titi, *Euler equations for incompressible ideal fluids*. Russian Mathematical Surveys **62** (2007), 409–451.
- [3] Miguel D. Bustamante und Robert M. Kerr, *3D Euler about a 2D symmetry plane*. Physica D: Nonlinear Phenomena **237** (2008), 1912–1920.
- [4] Marco Cannone und Susan Friedlander, *Navier: blow-up and collapse*. Notices of the American Mathematical Society **50** (2003), 7–13.
- [5] Peter Constantin, *On the Euler equations of incompressible fluids*. Bulletin of the American Mathematical Society **44** (2007), 603–621.

- [6] Charles R. Doering, *The 3D Navier–Stokes problem*. Annual Review of Fluid Mechanics **41** (2009), 109–128.
- [7] Gregory L. Eyink, *Dissipative anomalies in singular Euler flows*. Physica D: Nonlinear Phenomena **237** (2008), 1956–1968.
- [8] Charles L. Fefferman, *Existence & Smoothness of the Navier–Stokes Equation*. Clay Mathematics Institute, 2000; http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf.
- [9] Ciprian Foias, Oscar P. Manley, Ricardo M. S. Rosa und Roger M. Temam, *Navier–Stokes Equations and Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [10] John D. Gibbon, *The three-dimensional Euler equations: Where do we stand?* Physica D: Nonlinear Phenomena **237** (2008), 1894–1904.
- [11] Tobias Grafke, Holger Homann, Jürgen Dreher und Rainer Grauer, *Numerical simulations of possible finite time singularities in the incompressible Euler equations: comparison of numerical methods*. Physica D: Nonlinear Phenomena **237** (2008), 1932–1936.
- [12] John G. Heywood, *Remarks on the possible global regularity of solutions of the three-dimensional Navier–Stokes equations*. In: *Progress in Theoretical and Computational Fluid Mechanics*, Giovanni P. Galdi, Josef Málek und Jindřich Nečas (Herausgeber), Paseky 1993, Pitman Research Notes in Mathematics Series Vol. 308, Pitman, London, 1994, 1–32.
- [13] Thomas Y. Hou und Ruo Li, *Dynamic depletion of vortex stretching and non-blowup of the 3-D incompressible Euler equations*. Journal of Nonlinear Science **16** (2006), 639–664.
- [14] Robert M. Kerr, *Evidence for a singularity of the three-dimensional, incompressible Euler equations*. Physics of Fluids A **5** (1993), 1725–1746.
- [15] Robert M. Kerr, *Computational Euler history*. Preprint, 19. Juli 2006, 20 Seiten; <http://arxiv.org/abs/physics/0607148v2>.
- [16] Andrew J. Majda und Andrea L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [17] Terence Tao, *Why global regularity for Navier–Stokes is hard*, 2007; <http://terrytao.wordpress.com/2007/03/18/why-global-regularity-for-navier-stokes-is-hard/>.
- [18] Lloyd N. Trefethen, *Zehnstellige Probleme*. In: *Eine Einladung in die Mathematik* (dieses Buch).